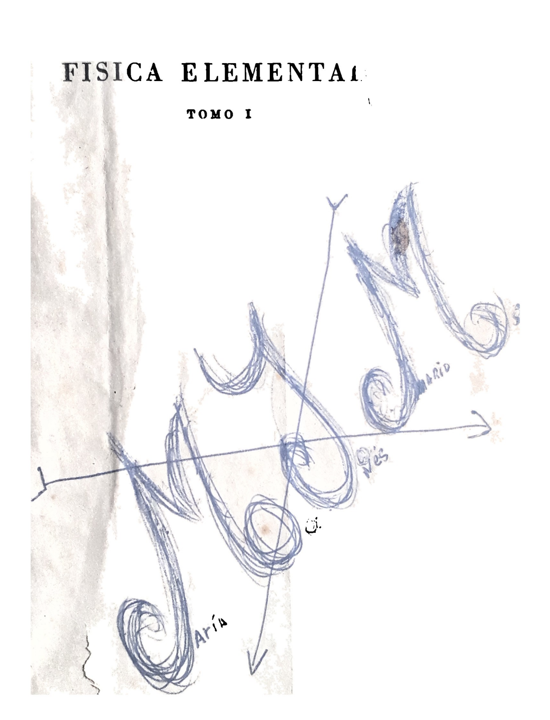
FISICA ELEMENTAL

PRIMER TOMO

JOSE S. FERNANDEZ
ERNESTO E. GALLONI

FISICA ELEMENTAL

TOMO I



FÍSICA ELEMENTAL

TOMO I

MECANICA - ACUSTICA - CALOR

JOSE S. FERNANDEZ

Ex profesor de física en las Facultades de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires y de Ciencias Físico Matemáticas de La Plata y en la Escuela Normal Nº 1 de Profesoras. Ex profesor de matemáticas en el Colegio Nacional Mariano Moreno.

ERNESTO E. GALLONI

Profesor titular de física en la Facultad de Ingeniería y en la Escuela Superior Técnica del Ejército.

Ex profesor de física en la Escuela Naval Militar y en el Colegio Nacional de Adrogué.

PARA USO DE ESCUELAS Y COLEGIOS DE ENSEÑANZA MEDIA

QUINTA EDICION

EDITOR

LIBRERIA Y EDITORIAL NIGAR, S. R. L.

ESTADOS UNIDOS 932

BUENOS AIRES

EJEMPLAR

Nº 0819

PRIMERA EDICIÓN 1939
SEGUNDA EDICIÓN 1940
TERCERA EDICIÓN 1941
1ª reimpresión 1942
2ª reimpresión 1942
3ª reimpresión 1943
4ª reimpresión 1943
5ª reimpresión 1944
6ª reimpresión 1944
7ª reimpresión 1945
8ª reimpresión 1946
9ª reimpresión 1947
CUARTA EDICIÓN 1949
1ª reimpresión 1951
2ª reimpresión 1952
3ª reimpresión 1953
4ª reimpresión 1954
5ª reimpresión 1954
6ª reimpresión 1955
7ª reimpresión 1956
8ª reimpresión 1957
9ª reimpresión 1957
QUINTA EDICIÓN 1958
1ª reimpresión 1959
2ª reimpresión 1960
3ª reimpresión 1961

A María Amanda

A Nélida Roca !

PRÓLOGO

Hace ya dos décadas, se realizó en Estados Unidos una investigación, en que intervinieron todos los directores de Liceos, acerca de cuál era la materia cuya enseñanza presentaba mayores dificultades y este singular honor correspondió a la Física.

Desde entonces, aquellas dificultades han aumentado, porque su campo se ha extendido y ha sido arado más profundamente. Un buen texto, es por ello, auxiliar poco menos que indispensable de todo maestro de esta ciencia.

Los ingenieros Fernández y Galloni han realizado, en tal sentido una labor útil, redactando un texto de física cuya difusión redundará en beneficio de nuestra enseñanza secundaria. Los temas han sido cuidadosamente seleccionados y correctamente expuestos; el lenguaje es claro, conciso y noble, como debiera serlo siempre el de la ciencia; la presentación es agradable y predispone al estudio.

No es frecuente que el profesor de una materia se decida a sustituir el texto que le es habitual después de varios años de enseñanza. Pero aún en tal caso, quisiéramos que prestara alguna atención a este nuevo libro, donde, sin duda, encontrará sugestiones que le serán útiles; y acaso aquella decisión no fuera después tan esquiva. Si ella se produjese, yo recogería un poco del agradecimiento de sus alumnos.

TEÓFILO ISNARDI

PROLOGO DE LOS AUTORES

De todos los ciclos de enseñanza, el medio es quizá el que plantea más dificultades al maestro.

Su función formativa hace que en él tenga fundamental importancia el estudio de las ciencias desde un punto de vista conceptual.

Las ciencias progresan rápidamente y el profesor debe tener especial cuidado en informar a sus alumnos sobre ese aspecto.

Pero en los planes de enseñanza media sólo puede tener cabida la parte de la ciencia suficientemente elaborada como para constituir la "ciencia clásica", eliminando todo lo que sea "teoría de último momento", pues de lo contrario se corre el riesgo de impartir conocimientos que a la vuelta de unos años han dejado de ser exactos, con el perjuicio que ello significa para el egresado que se dedica a otras disciplinas.

El texto de enseñanza no debe, por otra parte, ser un modelo de cuestionario con respuestas, en que con cuatro palabras se contesta aparentemente a todas las preguntas del programa oficial de la materia, por dos razones: porque no es eso lo que piden los programas, ni es esa la función de la enseñanza. Debe ser un elemento de estudio y de consulta, que además despierte una sana curiosidad y afán de profundizar los conocimientos.

Por esas razones hemos puesto nuestro empeño en escribir una obra que siendo útil al alumno para preparar la materia, lo invite a la reflexión y le aclare las dudas que se le presenten, un poco más allá de lo que exige la preparación de la lección diaria.

Hemos tratado de no sacrificar el rigor conceptual en nombre de una sencillez que generalmente resulta más aparente que real y agregamos algunos capítulos que no figuran en los programas, para completar así el cuadro de conocimientos de la física elemental.

Para guiar al estudiante en la selección de los temas, en los capítulos generales figuran con letra más pequeña aquellos puntos cuya lectura no es esencial.

Finalmente, cumplimos con un deber de conciencia expresando nuestro reconocimiento a quienes debemos la realización de este libro: por una parte a todos los que fueron nuestros maestros y por otra, a nuestros alumnos y colegas, en cuyo trato diario encontramos los motivos de discusión y reflexión que poco a poco van aclarando y puliendo nuestros conocimientos de la materia...

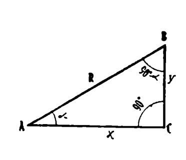
LOS AUTORES

ALFABETO GRIEGO

Mayúsculas	Minúsculas	Nombre	Equivalencia
Α	α	alfa	a
Β	β	beta	b
Γ	γ	gamma	g
Δ	δ	delta	d
Ε	ε	épsilon	e
Ζ	ζ	dseta	ds
Η	η	eta	e
Θ	θ	theta	z
Ι	ι	iota	i
Κ	κ	cappa	k
Λ	λ	lambda	l
Μ	μ	mu	m
Ν	ν	nu	n
Ξ	ξ	xi	x
Ο	ο	omicron	o
Π	π	pi	p
Ρ	ρ	rho	r
Σ	σ	sigma	s
Τ	τ	tau	t
Υ	υ	ypsilon	ü
Φ	φ	fi	f
Χ	χ	ji	j
Ψ	ψ	psi	ps
Ω	ω	omega	o

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

(Seno, coseno, tangente y cotangente)



$$\text{sen. } \alpha = \frac{y}{R} = \text{cos. } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{cos. } \alpha = \frac{x}{R} = \text{sen. } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{y}{x} = \text{cotg. } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{cotg. } \alpha = \frac{x}{y} = \text{tang. } (90^\circ - \alpha)$$

TABLA I

Valores de las funciones trigonométricas de grado en grado

	Sen.	Tang.	Cotg.	Cos.	
0	0,000	0,000	—	1,000	90°
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
	Cos.	Cotg.	Tang.	Sen.	

	Sen.	Tang.	Cotg.	Cos.	
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	Cos.	Cotg.	Tang.	Sen.	

INTRODUCCIÓN

§ 1.— **Cuerpo - Espacio - Tiempo.** — El contacto con el mundo que nos rodea, por intermedio de nuestros sentidos, la facultad que poseemos de desplazarnos (cambiar de lugar) y las modificaciones que se verifican a nuestro alrededor, crean en nuestro espíritu las nociones de **espacio** y **tiempo.**

Con estos conceptos decimos: los **cuerpos** están formados por **materia,** que ocupa porciones limitadas del espacio.

En realidad, el proceso mental es el siguiente: el contacto con nuestros sentidos (contacto en su acepción más amplia, directo o indirecto: táctil, visual, etc.) nos conduce a la noción de cuerpo. Luego, decimos: todos los cuerpos están formados por algo que adquiere muy diversas formas y características, pero que en conjunto llamamos *materia,* y, finalmente, decimos: todos los cuerpos o toda la materia, están distribuídos en el *espacio,* que medimos y caracterizamos por la materia que en él está colocada.

§ 2.— **Fenómenos.** — A todo cambio que se verifica en el mundo que nos rodea lo llamamos *fenómeno.* La caída de un cuerpo, la combustión de un fósforo, el latir del corazón, constituyen fenómenos. Se suelen hacer clasificaciones, más o menos arbitrarias, de los fenómenos en: biológicos, químicos, físicos, etc., aunque no es posible fijar criterios rigurosos que permitan clasificaciones estrictas y excluyentes. Así, por ejemplo: en el desarrollo de la vida de los organismos animados se produce un conjunto de fenómenos cuyo estudio incluyen las ciencias biológicas, pero muchos de los cuales figuran también en el cuadro correspondiente a las ciencias del mundo inanimado (fenómenos químicos, físicos, etc.).

Entre estas últimas figuran la física y la química. Aquí es donde resulta más difícil llegar a definiciones estrictas, ya que existe un grupo de fenómenos cuyo estudio cuadra dentro del campo de ambas ciencias (por ejemplo, el estudio de la estructura de la materia), y otros en que cada una de ellas estudia un aspecto particular. Si frotamos un fósforo sobre una superficie rugosa, se produce calor por el frotamiento (fenómeno físico) y con ello llega a iniciarse la combustión, o sea

una reacción en que intervienen la materia de que está hecho el fósforo y la atmósfera que lo rodea (fenómeno químico).

De un modo grosero, puede admitirse la definición clásica según la cual son fenómenos químicos aquellos en que se modifica la constitución de los cuerpos que intervienen y fenómenos físicos aquellos en que no se modifica; dejando aclarado que no es una definición excluyente.

El estudio de ambas ciencias proporcionará el mejor criterio para diferenciar ambos tipos de fenómenos.

§ 3.— **Objeto de la Física. Leyes.** — Diremos, pues, que la física se propone el estudio de los fenómenos físicos y la determinación de las leyes que los rigen. Entendemos por **leyes**, las relaciones cuantitativas que vinculan los distintos fenómenos.

Encontraremos, por ejemplo: las leyes de la caída de los cuerpos, o relaciones entre los caminos recorridos por un cuerpo que cae y los intervalos de tiempo transcurridos; leyes de la dilatación, o sea relaciones entre las variaciones de volumen que experimentan los cuerpos y las variaciones de temperatura correspondientes; etc.

Ciertas leyes fundamentales, que no admiten demostración en base a otras más simples y sólo se justifican por la comprobación de sus consecuencias, se denominan **principios**. (El principio de masa, el de conservación de la energía, etc.).

El conjunto de leyes relativas a fenómenos de igual naturaleza conduce a la **teoría** (serie o hilera), o sea el conjunto de leyes, suposiciones y explicaciones que constituyen un único cuerpo de doctrina aplicable a dicho grupo de fenómenos. Por ejemplo: teoría de la gravitación, teoría electromagnética.

El lenguaje de la física es la *matemática,* con cuyo auxilio se da a las leyes y teorías expresión simple y concreta, permitiendo *calcular* y *prever* resultados, objeto de la ciencia en último análisis. Las teorías meramente descriptivas no tienen cabida dentro de la física, ya que sólo las leyes cuantitativas son útiles a su finalidad. Al mismo tiempo, cabe la observación opuesta: las expresiones matemáticas de las leyes de la física *describen fenómenos,* de modo que por encima de su valor intrínseco como fórmulas matemáticas, está su significado físico.

§ 4.— **Método de la Física.** — Siendo una ciencia de la naturaleza, la física ha de basarse en la **observación** y la **experimentación**. El principio básico sin el cual pierde sentido toda ciencia natural es el *principio de causalidad*: "todo fenómeno se repite íntegramente en todas sus fases si se repiten exactamente las condiciones iniciales".

Observado, pues, un fenómeno, se determina la influencia

de cada uno de los factores que lo perturban (leyes que lo rigen).

Esto lleva de inmediato a la explicación o formulación de una hipótesis explicativa. Para confirmar o desechar la hipótesis se realiza la experimentación, que consiste en provocar la repetición del fenómeno, variar las circunstancias que lo acompañan y efectuar nuevas y meticulosas observaciones.

Si la experimentación confirma la hipótesis, se acepta y se generaliza el resultado obtenido.

Observación, hipótesis, experimentación y generalización (inducción), constituyen las fases del método de la física, por el que se llegan a establecer las leyes y teorías de los fenómenos.

Ejemplo de aplicación del método: Observando el hecho de que los cuerpos abandonados a sí mismos caen hacia la superficie terrestre siguiendo el camino más corto (la dirección de la plomada), se formuló la *hipótesis* explicativa diciendo:

"Los cuerpos caen porque la tierra ejerce sobre ellos una fuerza de atracción".

Esta hipótesis fué sometida a la experimentación: Galileo dejó caer cuerpos diversos desde la célebre torre de Pisa, observando los tiempos de caída y la influencia de la forma; más tarde, con el tubo de Newton se eliminó la acción perturbadora del aire.

Establecidos por este último los principios fundamentales de la mecánica, se comparó el efecto de esa supuesta atracción con el de otras fuerzas, y así se estableció la ley de acuerdo con la cual debía producirse la caída, de ser exacta la hipótesis de la existencia de esa fuerza de atracción. La experimentación comprobó la ley, confirmando así la hipótesis.

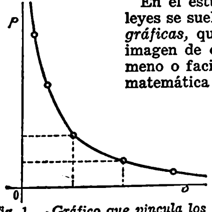


Fig. 1. — *Gráfico que vincula los valores de la presión y el volumen en una masa de gas a temperatura constante.*

En el estudio y determinación de muchas leyes se suele recurrir a las *representaciones gráficas*, que tienen la ventaja de dar una imagen de conjunto de la marcha del fenómeno o facilitar el hallazgo de la expresión matemática de la ley.

Un buen gráfico indicará rápidamente si se trata de una ley lineal (representable por una ecuación de primer grado), o de una ley cuadrática (2º grado), o cualquier otro tipo de ley.

La figura 1 representa la variación de volumen experimentada por una masa de gas,

comprimida a temperatura constante. Corresponde a la ley:

$$p\,v = \text{constante.} \quad \text{(Ley de Boyle Mariotte)}$$

La curva es una hipérbola y da idea inmediata de la marcha del fenómeno.

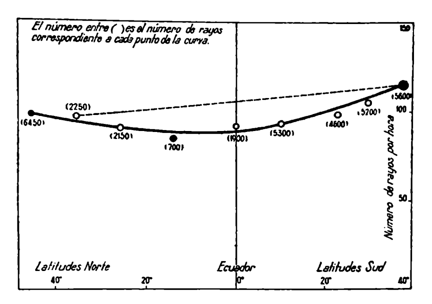


Fig. 2.—*Gráfico que da la variación de la radiación cósmica con la latitud.*

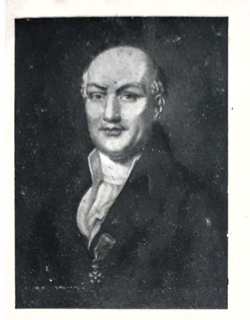
La fig. 2 es una representación gráfica de los resultados de las mediciones que han permitido comprobar que la radiación cósmica (radiación ultrapenetrante de origen desconocido, que llega a la superficie terrestre), varía en intensidad con la latitud. Este resultado permite fundamentar la hipótesis de que dicha radiación está constituída por partículas electrizadas.

§ 5 — **Moléculas y átomos.** — La materia es divisible; un sólido puede reducirse a polvo impalpable, cuyas partículas sólo sean visibles al microscopio.

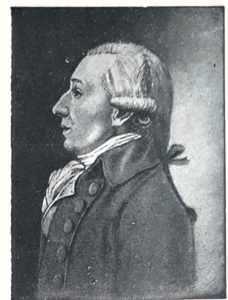
Un gramo de fucsina basta para colorear de rojo mil litros de agua.

Para obtener cien gramos de esencia se necesitan muchos kilogramos de flores, pero basta una sola flor para perfumar una habitación. Parecería, pues, que la posibilidad de subdivisión se puede extender indefinidamente.

Sin embargo, los resultados de la física y la química llevan a admitir que los compuestos químicos no pueden subdividirse más allá de ciertas partículas elementales, llamadas

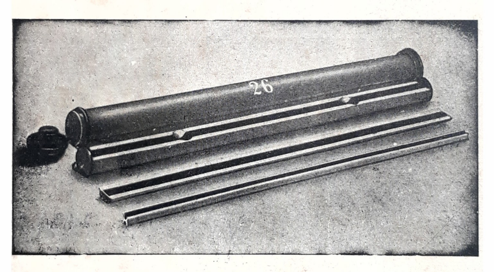


JUAN BAUTISTA JOSÉ DELAMBRE
(1749 - 1822)



PEDRO FRANCISCO ANDRÉS MECHAIN
(1744 - 1804)

Astrónomos y matemáticos franceses a cuyo cargo estuvo la medición del arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona, destinado a fijar la unidad de longitud, en base a las dimensiones de la tierra.



METRO PATRÓN

Metro patrón *guardado en los archivos del "Bureau International de Poids et Mesures" en el Pabellón Brèteuil ubicado en el parque de Saint Cloud, en la ciudad de Sèvres.*

Detrás del metro patrón se ven las dos partes de su envoltura y el estuche (Nº 26) en que se lo coloca.

moléculas, para que se conserven sus propiedades. A su vez, las moléculas son agrupaciones de partículas elementales de otros cuerpos simples, las que se denominan **átomos**.

La palabra átomo significa "indivisible", pero debe entenderse actualmente que son aquellas partículas constitutivas de los cuerpos simples, que no pueden subdividirse sin que pierdan las propiedades características.

Así, por ejemplo: el agua es un compuesto formado por moléculas. Cada molécula de agua está formada por la agrupación de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, que son cuerpos simples o elementos químicos.

Según las teorías modernas sobre la constitución de la materia, los átomos de todos los cuerpos están constituídos por una agrupación de cargas eléctricas del siguiente tipo: un **núcleo central**, cuya carga eléctrica es positiva, y a su alrededor un grupo de partículas llamadas electrones, cuya carga eléctrica es negativa, y que giran alrededor del núcleo como los planetas alrededor del sol. Cada sustancia está caracterizada por un número bien determinado de estos electrones. El átomo más sencillo es el de hidrógeno, cuyo núcleo central posee una carga eléctrica positiva y a su alrededor un electrón gira en su órbita.

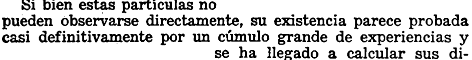


Fig. 3. — *Modelo atómico del hidrógeno según Rutherford.*

Las investigaciones más recientes están encaminadas a determinar la estructura de ese núcleo central, que aparece formado por la agrupación de otras partículas elementales.

Si bien estas partículas no pueden observarse directamente, su existencia parece probada casi definitivamente por un cúmulo grande de experiencias y se ha llegado a calcular sus dimensiones.

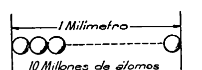


Fig. 4. — *Diez millones de átomos colocados en fila ocuparían un milímetro.*

El átomo de hidrógeno ocupa una esfera cuyo diámetro está contenido diez millones de veces en un milímetro. Es decir, que un glóbulo rojo de la sangre, cuya dimensión es aproximadamente de siete milésimas de milímetro, posee un diámetro setenta mil veces mayor que el del átomo de hidrógeno.

CAPÍTULO I

MAGNITUDES Y MEDICIONES

§ 6. — **Magnitudes escalares y vectoriales.** — Hemos dicho que el objeto de la física es establecer leyes, es decir, relaciones cuantitativas entre los fenómenos del mundo físico.

Para ello es necesario **medir**, y medir significa, en esencia, establecer coincidencias. Cuando decimos que un segmento tiene *tal* longitud queremos significar que, si uno de sus extremos coincide con la división cero de una regla graduada, el otro coincide con *tal* división; y si decimos que un tren ha tardado tres horas en recorrer un determinado camino, queremos decir que comparando con las

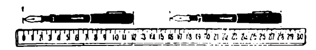


Fig. 5. — *Longitud medida por coincidencias de los extremos con las divisiones de una regla.*

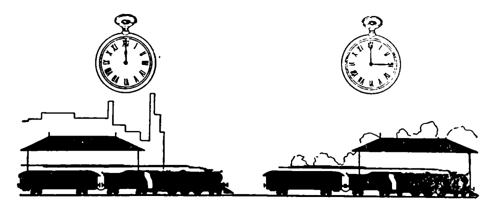


Fig. 6. — *La duración del viaje se determina observando las posiciones de las agujas de un reloj.*

posiciones de las agujas de un reloj los instantes de la partida y la llegada, encontramos una diferencia correspondiente a tres vueltas del minutero.

Son objeto de medida todas las **magnitudes**. L l a m a -

mos asi a ciertos entes abstractos para los cuales se pueden definir la *igualdad* y la *suma* (ej.: volumen, longitud, peso, etc.).

Todas las magnitudes son, pues, medibles, es decir, admiten una comparación con la magnitud unidad y el establecimiento de ùn número que indique cuantas veces la magnitud unidad está contenida en la magnitud dada. Podemos saber las veces que la longitud de nuestro lápiz tomada como unidad, está contenida en la longitud de nuestro escritorio, pero no podemos saber cuántas veces la sensación luminosa que percibimos mirando un fósforo encendido, está contenida en la que percibimos mirando una lámpara incandescente. Por eso decimos que son magnitudes los entes abstractos entre los cuales se puede establecer la *igualdad* y la *suma.* Con ello podremos fijar la unidad, tomar varias unidades iguales y sumarlas hasta obtener la magnitud dada.

Así, por ejemplo: podemos tomar dos volúmenes iguales (quiere decir esto: dos cuerpos de igual volumen) y podemos tener otro cuerpo cuyo volumen sea igual al de aquellos dos reunidos (suma); diremos entonces que el *volumen es una magnitud.*

En el conjunto de las magnitudes de la física que encontraremos en nuestro estudio, cabe todavía la posibilidad de otra clasificación; algunas de ellas quedan determinadas por un número y su unidad correspondiente (longitudes, volúmenes). Se las llama **magnitudes escalares**, y al representarlas con números se opera con ellas de acuerdo con las reglas del álgebra.

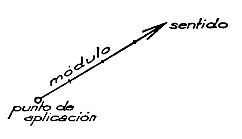


Fig. 7. — *Representación gráfica de una magnitud vectorial.*

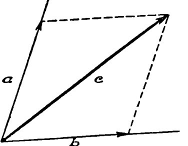


Fig. 8. — *Componentes de un vector.*

Otras, llamadas **magnitudes vectoriales**, se caracterizan por un número y su unidad, pero además debe fijarse su dirección, sentido y punto de aplicación, sin los cuales no quedan perfectamente determinadas; se las representa por **vectores**. El valor numérico de la magnitud está representado en una cierta escala por la longitud del vector (fig. 7) y se denomina **módulo** del mismo.

Más aun: fijada la magnitud correspondiente a una dirección determinada, podemos hallar sus *componentes* en otras direcciones por una descomposición geométrica (fig. 8). Realizamos con ellas *operaciones geométricas* que constituyen el *álgebra vectorial.*

Son ejemplos de estas magnitudes las fuerzas, velocidades y otras que iremos estudiando paulatinamente.

§ 7. — **El metro** (m). — La unidad fundamental para la medida de longitudes es el *metro.* Exactamente se define como la longitud igual a la distancia, a cero grado de temperatura, de los ejes de los trazos 2 y 5 marcados sobre el prototipo internacional de platino iridiado (designado M y marcado nº 6), depositado en la Oficina Internacional de pesas y medidas, en Sévres (localidad próxima a París).

Cuando la comisión dirigida por los matemáticos Delambre y Mechain, cumpliendo la ley de la Convención del 7 de abril de 1795, fijó la unidad de longitud en base a la medida del arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona, se creyó haber establecido una unidad vinculada en forma sencilla a las dimensiones del globo terrestre. El metro sería un diez millonésimo del cuarto de meridiano. Sin embargo, medidas posteriores comprobaron que, en principio, tal definición carece de sentido, puesto que la tierra no es una esfera, ni aún un cuerpo de revolución. Según Bessel, su forma es aproximadamente un elipsoide cuyo cuarto de meridiano mide 10 000 856 metros.

En base a medidas posteriores se acepta como cifra más exacta el valor 10 001 868 metros. De acuerdo con esto, el metro patrón ha resultado aproximadamente 1/5 de milímetro más corto que el valor que se le quiso dar.

Los trazos que lo definen se han marcado sobre una regla de 1,02 m de longitud, construída con aleación *platino-iridio* a los efectos de conocer sus variaciones de longitud por cambios de temperatura y cuya sección trasversal es la indicada en la fig. 9, con el objeto de disminuir los errores que podrían originar su flexionamiento.

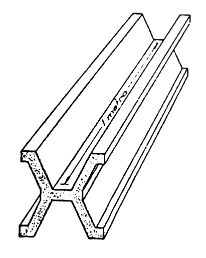


Fig. 9. — *Forma del metro patrón; la sección está dibujada en tamaño natural.*

Los trazos que determinan la longitud del metro patrón tienen un ancho de 6 a 8 milésimas de milímetro lo cual introduce cierta indeterminación en la longitud que exactamente ha de tomarse como un metro.

Para salvar este inconveniente, se define actualmente al metro como una longitud igual a 1 553 164,13 veces la longitud de onda de una línea roja característica del espectro luminoso del cadmio.

§ 8.— **Múltiplos y submúltiplos del metro.** — Para medidas de mayores o menores longitudes se utilizan los múltiplos y submúltiplos del metro.

Son múltiplos:

Decámetro	(Dm)	= 10 m
Hectómetro	(Hm)	= 100 m
Kilómetro	(Km)	= 1 000 m

Submúltiplos:

Decímetro	(dm)	= 0,1 m
Centímetro	(cm)	= 0,01 m
Milímetro	(mm)	= 0,001 m
Micrón	(μ)	= 0,000 001 m = 0,001 mm
Angström	(Å)	= 0,0001 μ $=10^{-8}$ cm

En astronomía, donde las distancias a medir son extraordinariamente grandes, se utilizan:

Unidad astronómica (distancia tierra-sol) = 1,4945 $\times$ 10^8 Km

Año luz = 6,3310 $\times$ 10^4 unidades astronómicas = camino recorrido por la luz en un año.

Parsec = distancia desde la cual se ve el radio de la órbita terrestre bajo un ángulo de 1 segundo (paralaje = 1") = 3,258 año luz.

§ 9.— **Unidades derivadas de superficie y volumen.**

1.— La unidad de superficie es el *metro cuadrado,* o sea un área igual a la de un cuadrado cuyo lado mide 1 *m.* Emplearemos el símbolo m^2.

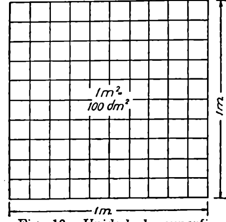


Fig. 10.—*Unidad de superficie: m²*

Sus múltiplos son:

Dm^2 = 100 m^2
Hm^2 = 10 000 m^2
Km^2 = 1 000 000 m^2

y los submúltiplos:

dm^2 = 0,01 m^2
cm^2 = 0,0001 m^2
mm^2 = 0,000001 m^2

En la práctica se emplean, especialmente al estimar superficies de campos, la hectárea, el área y la centiárea, que son, respectivamente, el hectómetro,

decámetro y el metro cuadrados. El Km^2 resulta entonces igual a cien hectáreas.

(1 Km^2 = 100 Ha. 00 a. 00 ca.).

2.—La unidad de volumen es el *metro cúbico* (m^3) o sea un volumen igual al de un cubo cuya arista es de 1 metro de longitud.

Los múltiplos, poco utilizados, se deducen como en el caso anterior.

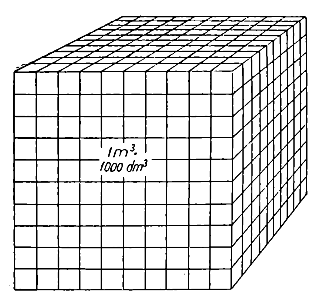


Fig. 11.—*Unidad de volumen:* m^3.

Los submúltiplos son:

$$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3 = 10^{-3}\ m^3$$
$$1\ cm^3 = 0{,}000\,001\ m^3 = 10^{-6}\ m^3$$
$$1\ mm^3 = 0{,}000\,000\,001\ m^3 = 10^{-9}\ m^3$$

3.—En la República Argentina se adoptó el sistema métrico decimal por ley del 10 de setiembre de 1863, complementada por la del 13 de julio de 1877.

El empleo obligatorio de este sistema se aplicó en las reparticiones públicas a partir del 1º de enero de 1879, y, en general, en todo el país desde el 1º de enero de 1887

TABLA II

UNIDADES ANTIGUAS Y SUS EQUIVALENCIAS

LONGITUD		SUPERFICIE	VOLUMEN
legua	= 5 196 m	legua cuadrada = 2.699 Ha, 84 a, 16 ca	
cuadra	= 129,90 m	cuadra cuadrada = 1 Ha, 68 a, 74,01 ca	
vara	= 0,866 m	vara cuadrada = 0,749956 m^2	
pie	= 0,288 m	pie cuadrado = 0,08332844 m^2	pie cúbico = 0,024054144 m^3
pulgada	= 0,024 m	pulgada cuadrada = 0,00057867 m^2 = 5,7867 cm^2	pulgada cúbica = 13,920 cm^3
línea	= 0,002 m		

Actualmente, en el comercio suelen emplearse medidas inglesas, algunas de igual nombre y valor algo distinto que estas medidas antiguas.

TABLA III

MEDIDAS INGLESAS

LONGITUD		SUPERFICIE		VOLUMEN	
pulgada	= 0,0254 m	pulgada cuadrada (square inch)	= 6,4516 cm²	pulgada cúbica	= 0,0164 dm³
pie	= 0,3048 m	pie cuadrado	= 0,0929 m²	pie cúbico	= 28,316 dm³
yarda	= 0,9144 m	acre	= 4046,7 m²	galón	= 4,54596 lit. (1)
milla	= 1760 yardas ≅ 1609,34 m			pinta	= 0,56824 lit.
milla marina (nautical mile)	= 1855 m (2)				

§ 10.—**Unidades de ángulo.** - 1.—Los ángulos pueden medirse en *grados sexagesimales*, cada uno de los cuales es la 90 ava parte de un cuadrante o ángulo recto.

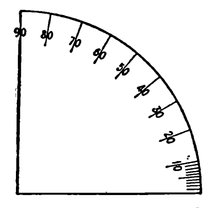


Fig. 12.—*Cuadrante dividido en grados sexagesimales.*

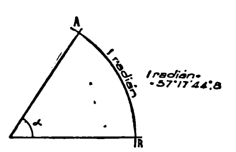


Fig. 13.—*Angulo de un radián. Arco AB = radio.*

Cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. La unidad grado se abrevia con un cero como exponente, los minutos con una coma y los segundos con dos comas. Así por ejemplo: 36° 48' 26" se lee: 36 grados 48 minutos 26 segundos.

(1) 1 litro = 1,000027 dm3.
(2) La longitud media del minuto sexagesimal de latitud terrestre adoptada por el «Bureau des Longitudes» en 1906, es de 1852 metros (milla marina francesa).
En la Argentina se usa para las cartas marinas la milla inglesa de 1855 m.

Otra unidad que utilizaremos más frecuentemente en física para la medida de los ángulos es el *radián,* que es el ángulo al cual corresponde un arco de longitud igual al radio (figura 13).

La medida de un ángulo en radianes será, pues, el cociente

$$\alpha \text{ (radianes)} = \frac{\text{longitud arco}}{\text{longitud radio}} \qquad [1]$$

Siendo el cociente de dos longitudes, esta unidad es un número abstracto.

2. — Cuando se estableció el sistema métrico decimal, se fijó como unidad para la medida de ángulos el *grado centesimal,* que es la centésima parte de un cuadrante ,el cual se subdivide en 100 minutos de grado centesimal y éste en 100 segundos. En este sistema, siendo la longitud del cuadrante de meridiano de 10 000 000 de metros, correspondería cada grado a 100 km y cada minuto a 1 km. De este modo, resultaría sencillo calcular la diferencia de latitud entre dos lugares de un mismo meridiano dada su distancia en metros y recíprocamente. Sin embargo, no ha tenido aceptación en ninguno de los países que adoptaron el sistema métrico decimal, y hoy resulta difícil encontrar tablas correspondientes a esta unidad. Es casi exclusivo y universal el uso del radián y el grado sexagesimal.

3. — *Equivalencias:*

$$1 \text{ circunferencia} = 360^\circ = 2\,\pi \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\,\pi} = 57^\circ 17' 44'',8 = 206.264,8''$$

4. — Cuando se trata de ángulos muy pequeños (hasta 5°), pueden considerarse iguales el *seno,* la *tangente* y el *ángulo en radianes.* El coseno es prácticamente igual a la unidad. (Tabla IV).

TABLA IV

α en grados	α en radianes	sen. α	tg. α	cos. α
0°	0	0	0	1
0°30'	0,00873	0,00873	0,00873	0,99996
1°	0,01745	0,01745	0,01746	0,99985
2°	0,03491	0,03490	0,03492	0,99939
3°	0,05236	0,05234	0,05241	0,99863
4°	0,06981	0,06976	0,06993	0,99756
5°	0,08727	0,08716	0,08749	0,99619

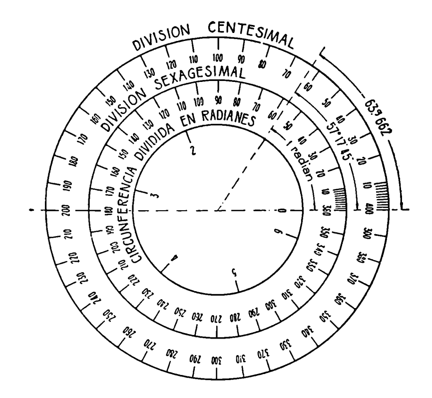


Fig. 13 bis.—*Comparación de las unidades de medida de ángulos.*

§ 10 a). — **Angulo sólido.** — Se llama **ángulo sólido** al espacio delimitado por una superficie cónica.

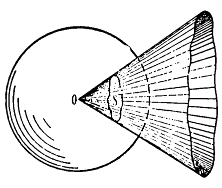


Fig. 14. —*Angulo sólido de vértice O.*

Se mide el ángulo sólido por la relación entre el área de la superficie determinada por el cono sobre una esfera cualquiera de centro en el vértice O y el cuadrado del radio de la esfera, (figura 14).

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \qquad [2]$$

La unidad del ángulo sólido se tiene cuando $S = R^2$ y se denomina *esterradián*.

El ángulo sólido correspondiente a toda la esfera será, por tanto, $\Omega = 4\pi$.

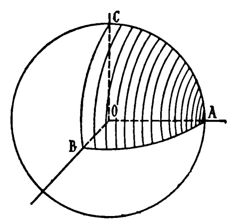


Fig. 15. — *En el triedro trirrectángulo el ángulo sólido es* $\frac{\pi}{2}$ *esterradián.*

Un triedro trirrectángulo (fig. 15) abarca un ángulo sólido:

$$\Omega_1 = \frac{S}{R^2} = \frac{1}{8}\,\frac{4\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{2}$$

§ 11. — **Nonius o Vernier** (¹). — La medición de longitudes se realiza con reglas graduadas. Hasta el medio milímetro se puede medir por lectura directa. Para longitudes menores, ni es fácil construir las divisiones de la regla ni es posible que el ojo pueda apreciarlas. Se utiliza entonces el nonius o vernier, que consiste en una pequeña reglilla que corre al lado de la regla graduada, en la cual N divisiones del vernier corresponden a $n = N - 1$ de la regla.

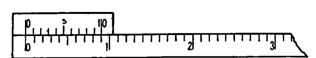


Fig. 16.—*Vernier rectilíneo de aproximación* 0.1

Supongamos que se tiene una regla dividida en milímetros y que se ha construído un vernier en que sus 10 divisiones corresponden a 9 de la regla (9 mm). Cada división del vernier valdrá, por lo tanto, 9/10 mm (fig. 16).

(1) Nonius, nonio o nunez, nombre asignado en homenaje a Pedro Núñez Salacíense, matemático portugués (1492-1577), cuyo apellido en latín es Nonius.
Vernier Pedro, Geómetra francés a quien se atribuye su invención.

La menor longitud que se pueda apreciar será la diferencia entre ambas divisiones, o sea 1/10 mm. Esta es la aproximación.

Para efectuar medidas se coloca un extremo del objeto a medir en el cero de la regla y se hace coincidir con el otro extremo el cero del vernier. Se lee en la regla hasta la división más próxima al cero del vernier y el segmento restante se calcula multiplicando el número de orden de la división del vernier que coincide con una de la regla, por la aproximación. En el caso de la figura 17 se tiene:

Fig. 17.—*Medida con el Vernier. Lectura*: 12.7.

lectura en la regla: 12 mm;

lectura en el vernier (división que coincide): 7

longitud total: $12 + 7 \times 0{,}1 = 12{,}7$ mm.

La observación de la figura 18 permite comprender el por qué de este cálculo del segmento restante.

En efecto: coincidiendo la división Nº 7 del vernier con una cualquiera (la 19) de la regla, la división Nº 6 queda corrida de 0.1 mm con respecto a la más próxima (la 18) de la regla.

La Nº 5 quedará corrida de 2 x 0,1 mm con respecto a la 17 de la regla y así sucesivamente.

La división Nº 0, queda corrida de 7 x 0,1 con respecto a la división 12 de la regla. En general coincidiendo la división *K* y siendo *A* la aproximación, el segmento restante será: *K. A.*

Fig. 18.—*Vernier rectilíneo aproximación* 0.01.

$$(d = \frac{1}{2}\ ;\ N = 50)$$

El ejemplo que hemos dado, de un vernier con aproximación 1/10 mm, no es más que un caso particular. En la práctica es corriente el uso de otros, cuyas aproximaciones son:

$\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{50}\ \frac{1}{100}$ mm y que se basan en el mismo principio constructivo.

Si llamamos **d** a la división más pequeña de la regla y **a** la del vernier, la menor longitud que se pueda apreciar (aproximación) será:

$$A = d - v$$

Teniendo en cuenta que *N* divisiones de longitud *v* corresponden a *N — 1* de longitud *d,* resulta:

$$N\,v = (N - 1)\,d$$

o sea:

$$N\,v = N\,d - d$$

de donde:

$$Nd - Nv = d$$

y:

$$d - v = \frac{d}{N}$$

luego:

$$A = \frac{d}{N} \qquad [3]$$

Es decir: la aproximación es igual al cociente de la longitud de la menor división de la regla por el número total de divisiones del vernier.

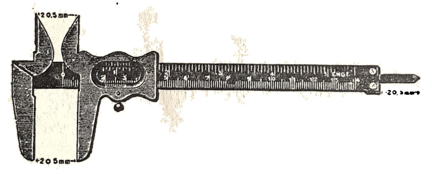


Fig. 19.—*Aplicación del Vernier. compás de corredera o calibre para diámetros externos o internos. Graduado en mm y en pulgadas.*

El método de lectura es el mismo indicado anteriormente cualquiera sea la aproximación del vernier.

§ 11 a).—*Vernier circular.*—Se lo emplea para medir ángulos y su construcción y uso son análogos a los del vernier rectilíneo.

La figura 20 muestra un vernier circular en el que la división menor de la regla es $d = \frac{1^\circ}{2} = 30'$.

El vernier está numerado de 0 a 30, pero el número total de divisiones es: $N = 60$.

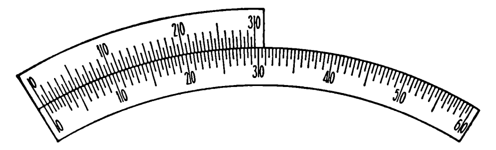


Fig. 20.—*Vernier circular de aproximación 30".*

En el caso de la figura 20 resulta la aproximación (fórmula [31]).

$$A = \frac{d}{N} = \frac{30'}{60} = \frac{1'}{2} = 30''$$

En la figura 21 la lectura dada por la posición del cero del vernier es: 20°. La división del vernier que coincide (y que está marcada con una flecha), tiene número de orden 33.

La lectura es:

en la escala: 20°

división del vernier: 33

ángulo: $20^\circ + 33 \times 30'' = 20^\circ\ 16'\ 30''$

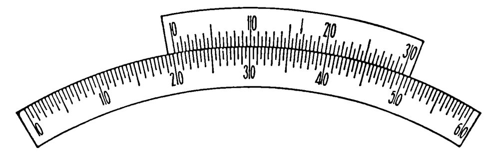


Fig. 21.—*Medida en el vernier circular: 20° 16' 30".*

La numeración del vernier permite la lectura directa de los minutos y fracciones de 30".

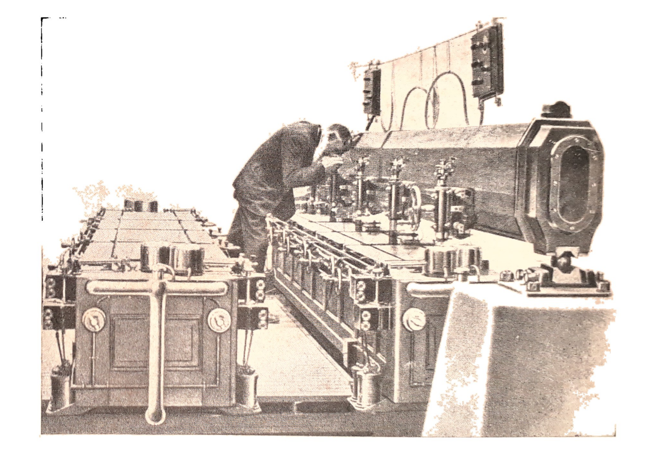
Comparador de Reglas métricas

Aparato moderno para preparación de reglas geodésicas de 4 m. de longitud, construído por la "Sociedad Ginebrina de Instrumentos de Física".

Posee una regla patrón de "Invar" (aleación especial de acero y níquel) con divisiones que corresponden a la longitud de 1 metro a distintas temperaturas. La comparación se realiza con ayuda de microscopios micrométricos.

Por medio de termostatos se mantiene constante la temperatura.

En la Argentina existe un comparador de este tipo en el Instituto Geográfico Militar.



CAPÍTULO II

ESTÁTICA

§ 13.— Fuerzas - Gravedad - Peso.

De nuestra experiencia sensorial tenemos una noción intuitiva de fuerza. Sabemos que para sostener un cuerpo debe-

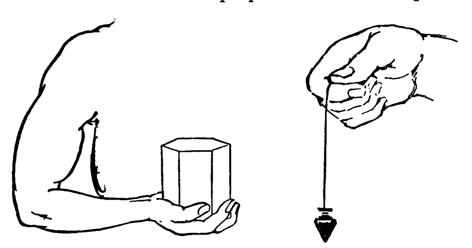


Fig. 27.—*La pesa se sostiene por el esfuerzo muscular.*

Fig. 28.—*La plomada indica la dirección de la vertical.*

mos efectuar un esfuerzo muscular que llamamos *fuerza* y admitimos que esa fuerza tiene por objeto equilibrar la que ejerce el cuerpo como consecuencia de la atracción terrestre. Esta atracción se llama fuerza de **gravedad o peso.**

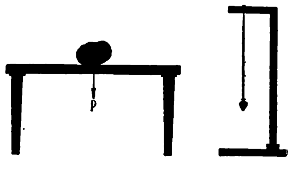


Fig. 29.—*El cuerpo ejerce una fuerza sobre la mesa, como la plomada sobre el soporte.*

Si el cuerpo está colgado de un hilo, éste toma una posición que llamamos **vertical** y nos determina la dirección de

la fuerza de gravedad, que prácticamente coincide con la del radio terrestre.

El sentido de la fuerza es de arriba hacia abajo.

Por analogía, cuando observamos un cuerpo colgado o apoyado sobre otro decimos que ejerce una fuerza sobre él.

También cuando queremos desplazar un cuerpo aplicamos sobre él nuestro esfuerzo muscular (una fuerza), y cuando observamos que un cuerpo comienza a moverse por acción de otro decimos que el segundo ha ejercido una fuerza sobre el primero (fig. 30).

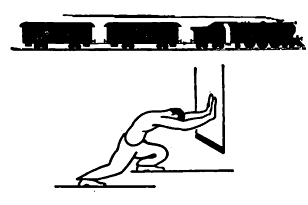


Fig. 30.—*El esfuerzo muscular mueve el obstáculo; la fuerza de la locomotora arrastra los vagones.*

Esta acción (fuerza) puede no ser trasmitida por contacto directo; así, un imán ejerce una fuerza de atracción sobre un trozo de hierro separado de él, y la atracción de la tierra (peso) se manifiesta sin que los cuerpos estén en contacto con ella.

El concepto de fuerza, que no pretenderemos definir, aparece así como una extensión al mundo físico, de una noción puramente subjetiva.

§ 13 a). — **Principio de acción y reacción.**

En todos los ejemplos anteriores: el del cuerpo que sostenemos levantado, el del que pende colgado de un hilo, el del que se encuentra apoyado sobre una mesa, debemos admitir que el apoyo o sostén ejerce una fuerza que equilibra al peso del cuerpo.

A la acción del peso corresponde una reacción igual y contraria.

En general, cuando un cuerpo ejerce una acción (fuerza) sobre otro, recibe una reacción igual y contraria. Este enunciado corresponde al principio de la igualdad de acción y reacción.

§ 14. — **Unidades de peso.**

Tomaremos como unidad para la medida de los pesos el **kilogramo patrón** (*kgr*) que es el peso normal (*o sea, a 45° de latitud y al nivel del mar*) del prototipo de platino-iridio depositado en la Ofi-

c i n a I n t e r n a c i o n a l de P e s a s y M e d i d a s, e n S é v r e s.

Es necesario definirlo con relación a lugar y altitud, pues el peso de los cuerpos varía con su ubicación sobre la tierra, como veremos más adelante.

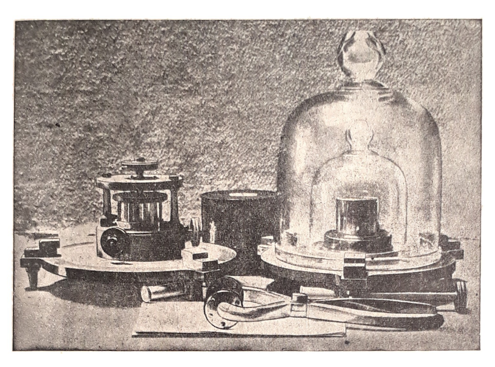


Fig. 31.—*El Kilogramo patrón de los Archivos de Sévres, en sus envolturas. En la Argentina existe una copia desde 1939.*

Como múltiplo se utiliza la tonelada (ton) = 1000 kgr y como submúltiplos: el gramo peso (gr) = 0,001 kgr y el miligramo peso (mgr) = 0,001 gr.

§ 15 — **Peso específico.**

Se llama p e s o e s p e c í f i c o a l a r e l a c i ó n e n t r e e l p e s o y e l v o l u m e n d e u n c u e r p o. Es decir, si *P* es el peso y *V* el volumen:

$$\rho = \frac{P}{V} \qquad [1]$$

o sea, es el peso de la unidad de volumen.

Con las unidades que hemos definido resultará el peso específico expresado en $\frac{kgr}{cm^3}$, $\frac{gr}{cm^3}$ o $\frac{ton}{m^3}$

Se suele utilizar el peso específico relativo, que es el cociente del peso específico del cuerpo dividido por el de una sustancia que se toma como elemento de referencia.

Así, por ejemplo, se suele dar el peso específico con relación al agua a 4° de temperatura:

$$D = \frac{\rho}{\rho_a} = \frac{P/v}{P'/v} = \frac{P}{P'} \qquad [2]$$

que se puede definir como el cociente del peso P del cuerpo, por el peso P' de igual volumen V de agua a 4° de temperatura. Como se comprende, el peso específico relativo es un número abstracto. (Veremos más adelante que coincide con lo que se llama densidad relativa) y no depende de la latitud del lugar, como el peso específico.

§ 16.—**Medida de las fuerzas - Dinamómetros.**

Hemos definido las fuerzas por analogía con los pesos; para la medida de unos y otros utilizamos aparatos llamados dinamómetros, que se basan en las propiedades elásticas de ciertos materiales.

Sabemos que todos los cuerpos se deforman por la acción de fuerzas exteriores. Llamamos cuerpos elásticos a aquellos que, suprimido el esfuerzo exterior, recobran su forma primitiva. Dentro de ciertos límites, los metales son elásticos. Una vez establecida la ley de las deformaciones en función de las fuerzas, podemos, midiendo la deformación, medir la fuerza.

Así, por ejemplo: sea un resorte metálico, cuya longitud conocemos cuando está descargado. Si colgamos pesas en su extremo experimentará alargamientos y en la escala colocada frente al índice del extremo, podremos marcar el peso que corresponde a cada posición del índice (fig. 32). Una vez hecha esta experiencia, que llamamos **calibración**, podemos realizar la experiencia opuesta: colocado un peso desconocido, medirlo por la posición del índice sobre la escala, es decir, por el alargamiento que produce al resorte.

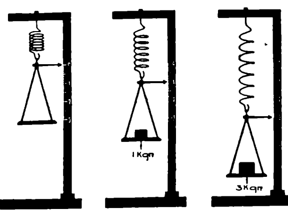


Fig. 32.—*Colocando pesos conocidos se calibra el dinamómetro*

Este es el principio en que se basan todos los dinamómetros. El cuerpo elástico puede ser otro (varilla flexible en lugar de resorte), pero el fundamento es siempre el mismo.



Fig. 33.—*Diversos modelos de dinamómetros.*

Cualquier fuerza podrá medirse por la deformación producida al dinamómetro, como si se tratara de un peso. Esta medida se llama **intensidad de la fuerza.**

§ 17. — **Representación gráfica de las fuerzas.**

Hemos dicho que el peso es una fuerza de dirección vertical y cuyo sentido va hacia abajo. Toda otra fuerza estará caracterizada por una dirección y un sentido, además de la intensidad.

5 Kgr

Fig. 34.—*Representación gráfica de una fuerza. Escala:* 1 *kgr.* = 6 *mm.*

Siendo magnitudes vectoriales, las fuerzas se representarán por vectores. La dirección y sentido del vector indicarán dirección y sentido de la fuerza y la longitud o módulo del vector se tomará proporcional a la intensidad de la fuerza. Cada unidad de longitud representará una cierta cantidad de unidades de fuerza; ésta es la **escala** de la representación. El origen del vector representa el punto de aplicación de la fuerza.

Ejemplo: Representar una fuerza horizontal, dirigida de izquierda a derecha del observador y cuya intensidad es de 80 kgr, en escala de 20 kgr = 1 cm.

80 Kgr

Fig. 35.—*Representación gráfica de una fuerza horizontal de 80 kgr en escala de 20 kgr = 1 cm.*

Se dibujará un segmento horizontal de 4 cm de longitud y con la flecha indicadora del sentido hacia la derecha.

§ 18.— **Sistemas de fuerzas - Equilibrio.**

Un conjunto de fuerzas aplicadas a un cuerpo constituye un **sistema de fuerzas.**

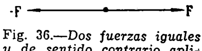


Fig. 36.—*Dos fuerzas iguales y de sentido contrario aplicadas al mismo punto se equilibran.*

Se llama **estática** al capítulo de la física que trata del equilibrio de los sistemas de fuerzas.

El problema más simple es el del equilibrio de *dos fuerzas.* Es evidente que dos fuerzas aplicadas a un mismo punto se equilibran cuando son de igual intensidad, de la misma dirección y de sentido contrario.

En un cuerpo rígido (indeformable) dos fuerzas iguales y contrarias se equilibran siempre que tengan la misma recta de acción (fig. 37). Es que en este caso (cuerpo rígido) toda fuerza puede trasladarse a lo largo de su recta de acción sin que se modifique su efecto; su punto de aplicación puede así elegirse arbitrariamente sobre esa recta. Llevando a coincidir los puntos de aplicación de ambas fuerzas se reduce este caso al anterior.

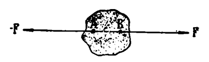


Fig. 37.—*Equilibrio de dos fuerzas aplicadas en diferentes puntos del cuerpo rígido.*

§ 19.— **Composición de fuerzas concurrentes - Regla del paralelogramo.**

1.— Son fuerzas concurrentes aquellas cuyas rectas de acción pasan por un punto.

Cuando se tienen varias fuerzas concurrentes puede ocurrir que estén en equilibrio aunque sus rectas de acción formen ángulos cualesquiera entre sí. En ese caso cada una de ellas es equilibrada por las demás. Estas pueden entonces sustituirse por una única fuerza, igual y contraria a la primera, que llamaremos su *resultante.* Si las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 están en equilibrio, decimos que cada una de ellas (la F_3, por ejemplo) equilibra a la resultante de todas las demás, o sea, por lo que vimos anteriormente, que la resultante de las fuerzas F_1, F_2 y F_4 es igual y opuesta a la fuerza F_3.

Fig. 38.—*Si cuatro fuerzas se equilibran, cada una equilibra a la resultante de las otras tres.*

Diremos, en general: Se llama resultante

(o suma) de un sistema de fuerzas, a una fuerza igual y de sentido contrario a la fuerza que es necesario agregar al sistema para equilibrarlo.

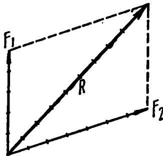
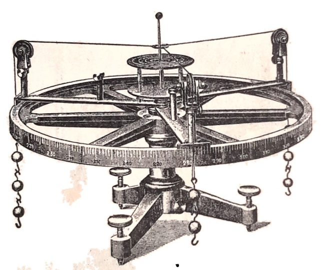


Fig. 39.—*Regla del paralelogramo*

Con esta definición comprobamos experimentalmente que: dadas dos fuerzas concurrentes, F_1 y F_2 (fig. 39), *su resultante R es igual a la fuerza representada por la diagonal del paralelogramo construído tomando por lados los vectores que representan a las fuerzas dadas.* Es decir, que el sistema formado por F_1, F_2 y $-R$ está en equilibrio (1).

La comprobación puede realizarse con el aparato de Varignon (fig. 40), que consiste en un disco con tres pequeñas poleas en el borde. Tres hilos fijos a un punto pasan por esas poleas, y en sus extremos libres se colocan pesos variables que permiten llevar la intersección de los hilos al centro del disco.


Fig. 40.—*Aparato de Varignon para comprobar la regla del paralelogramo.*

Conseguido el equilibrio, se determinan los pesos, que por las poleas se trasmiten directamente a los hilos, y se dibujan, colocando una hoja de papel debajo (2) las direcciones concu-

(1) El módulo de R resulta así menor que la suma aritmética de los módulos de los componentes F_1 y F_2.
(2) Pueden medirse los ángulos de las fuerzas en la escala del borde del aparato.

rrentes de los hilos. Representando, en una escala cualquiera, los valores de las fuerzas en las direcciones de los hilos, se comprobará que se cumple el principio del paralelogramo.

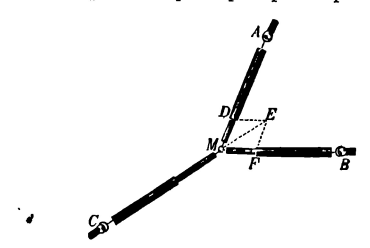


Fig. 41.—*Comprobación de la regla del paralelogramo empleando dinamómetros.*

Puede también efectuarse la comprobación empleando los dispositivos de las figs. 41 y 42, utilizando dinamómetros o pesas y poleas.

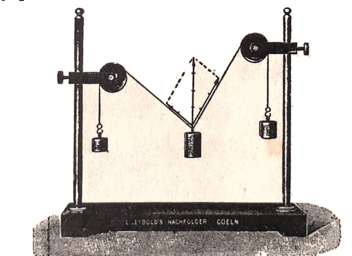


Fig. 42.—*Comprobación de la regla del paralelogramo utilizando poleas.*

2. — **Resolución analítica.**

Resuelto gráficamente el problema de hallar la resultante de dos fuerzas concurrentes, puede también hallarse analíticamente. Es fácil

ver que la resultante es el tercer lado de un triángulo cuyos otros dos lados son las fuerzas dadas.

Aplicando un conocido teorema de trigonometría: "el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido" (teorema del coseno), resulta:

$$R^2 = f_1^2 + f_2^2 - 2f_1\, f_2 \cos \beta$$

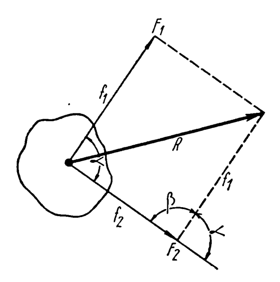


Fig. 43

Pero (fig. 43):

$\beta = 180 - \alpha$, en que α es el ángulo de las fuerzas.

Luego: $\cos \beta = - \cos \alpha$

y, finalmente: $R^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2\, f_1\, f_2 \cos \alpha$ [3]

Si el ángulo α es recto se aplica directamente el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = f_1^2 + f_2^2$$

3 — *Resultante de tres o más fuerzas concurrentes.*

Si en lugar de dos son tres o más las fuerzas concurrentes que se trata de componer, el problema se resuelve por pasos sucesivos, hallando la resultante de dos de ellas, luego la de esta resultante con la siguiente, y así sucesivamente (fig. 44).

Si se tienen tres fuerzas no coplanares, la resultante es

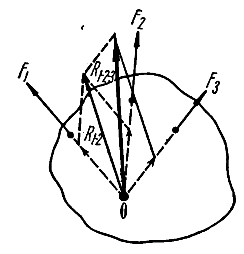


Fig. 44.—*Resultante de tres fuerzas concurrentes coplanares, aplicadas en diferentes puntos de un cuerpo rígido.*

la diagonal del paralelepípedo construído con los vectores como aristas (fig. 45).

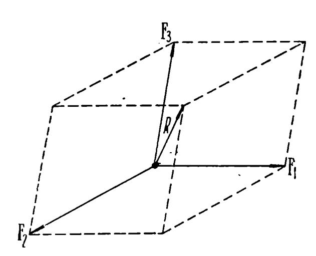


Fig. 45.—*Composición de tres fuerzas concurrentes no coplanares.*

4.—*Triángulo y polígono de fuerzas.*

De las figuras 46 y 47 se deduce que para hallar la resultante se aplica el criterio siguiente: se dibujan sucesivamente los vectores representativos tomando como origen de cada uno el extremo del anterior. El vector que resulte de unir el origen del primero con el extremo del último es el vector resultante del sistema.

Se ha formado un polígono llamado *polígono de las fuerzas.*

Si el polígono resulta cerrado, el sistema está en equilibrio por tener resultante nula.

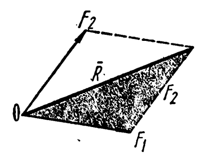


Fig. 46.—*Las componentes y la resultante forman un triángulo.*

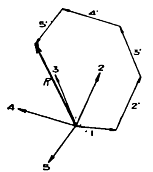


Fig. 47.—*Polígono de las fuerzas.*

§ 20. — Descomposición de fuerzas concurrentes.

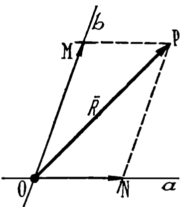


Fig. 48. — *Descomposición de una fuerza en otras dos.*

1. — *Descomposición en dos fuerzas de direcciones dadas.*

Es el problema inverso del anterior. Se da la resultante y las rectas de acción de las componentes y se trata de determinar sus intensidades.

Se resuelve trazando por el extremo P de la resultante (figura 48) rectas paralelas a las direcciones dadas *Oa* y *Ob; OM* y *ON* son los vectores que representan las componentes pedidas.

2. — *Dada la resultante y una componente, hallar la otra (resta de vectores).*

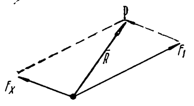


Fig. 49.—*Dados* R *y* F_1 *hallar* F_x

Si se da la resultante *R* y la fuerza F_1, para hallar la fuerza F_x, que, sumada a la anterior, da *R,* se traza el segmento AP, que une ambos extremos. El vector *OB,* igual y paralelo a *AP,* representa la fuerza buscada.

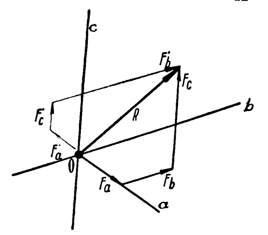


Fig. 50.—*La descomposición de una fuerza en tres concurrentes coplanares, de direcciones dadas, tiene infinitas soluciones.*

3.—*Descomponer una fuerza en tres de direcciones dadas.* Este problema tiene infinitas soluciones si las fuerzas son coplanares. Fijadas arbitrariamente las intensidades de dos de ellas siempre puede determinarse una tercera en la dirección pedida, en forma tal que constituya una solución del problema (fig. 50).

Si las direcciones son *no coplanares* se hallan las componentes trazando por el extremo de la resultante planos paralelos a los que determinan las direcciones dos a dos (fig. 51).

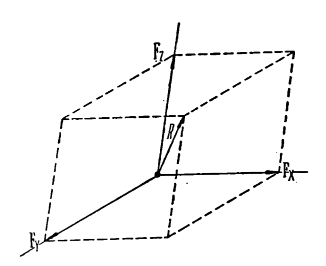


Fig. 51.—*Descomposición de una fuerza en tres concurrentes no coplanares.*

§ 21. — Composición de fuerzas paralelas.

1. — *Fuerzas paralelas de igual sentido.*

La resultante R de dos fuerzas F_1 y F_2, paralelas y del mismo sentido, cumple las siguientes condiciones:

a) *Es paralela y del mismo sentido que las componentes.*

b) *Su intensidad es igual a la suma de las intensidades de las componentes:*

$$R = F_1 + F_2$$

c) El punto C, interior al segmento AB, lo divide en partes inversamente proporcionales a las intensidades de las fuerzas adyacentes [1].

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \qquad [4]$$

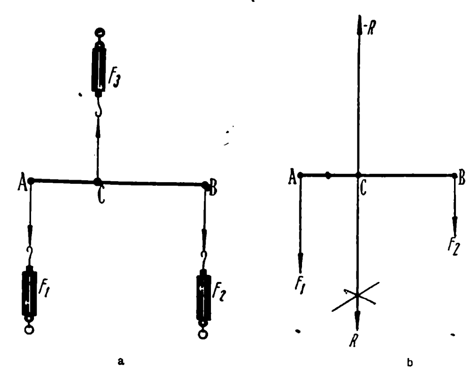


Fig. 52.—*Composición de fuerzas paralelas de igual sentido.*

Esto puede comprobarse experimentalmente con un dispositivo como el de la figura 52 a, en que la resultante de F_1 y F_2 está equilibrada por la fuerza F_3, siendo *ACB* una varilla suficientemente rígida.

La figura 52 b corresponde a los vectores representativos de las fuerzas.

Ejemplo: Si

$$AB = 30 \text{ cm}$$
$$F_1 = 200 \text{ gr}$$
$$F_2 = 100 \text{ gr}$$

Se comprueba que $F_3 = 300$ gr, y que: AC = 10 cm, y BC = 20 cm.

(1) Los puntos *A, B* y *C* son las intersecciones de las rectas de acción de las fuerzas F_1, F_2 y R con una recta cualquiera del cuerpo rígido al que están aplicadas (ver final § 18).

2.—El resultado anterior puede alcanzarse reduciendo el caso al de fuerzas concurrentes. Para ello se agregan al sistema dos fuerzas iguales y contrarias f y f' aplicadas en los puntos *A* y *B* sobre la misma recta de acción. Estas fuerzas, como hemos visto, se equilibran y, por lo tanto, no modifican la resultante del sistema.

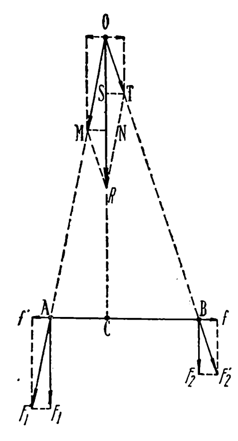


Fig. 53.—*Resultante de fuerzas paralelas.*

Componiendo f con F_2 y f' con F_1, tenemos las fuerzas concurrentes F'_2 y F'_1, cuya resultante *R* será paralela a F_1 y F_2, y de módulo igual a su suma. En efecto, si en O volvemos a descomponer la fuerza F'_1 en sus componentes f' y F_1 y la F'_2 en f y F^2, la resultante de las cuatro fuerzas se reduce a la suma de F_1 y F_2, pues f y f' se equilibran. De los triángulos semejantes OAC y OMN se deduce:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{MN}{ON} = \frac{f'}{F_1}$$

De OBC y OST resulta:

$$\frac{BC}{OC} = \frac{ST}{OS} = \frac{f}{F_2}$$

dividendo ordenadamente,

$$\frac{AC}{OC} : \frac{BC}{OC} = \frac{f'}{F_1} : \frac{f}{F_2}$$

y como f = f'

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

como queríamos demostrar.

3.—*Fuerzas paralelas y de sentido contrario.*

De acuerdo con la definición de *resultante* de un sistema de fuerzas, sabemos que, si la fuerza F_3 es igual y de sentido contrario a la resultante de F_1 y F_2, podemos también decir que F_2 es igual y de sentido contrario a la resultante de F_1 y F_3, que son paralelas y de sentido contrario (fig. 54).

Resulta, pues, observando la figura y recordando los resultados anteriores, que la resultante de dos fuerzas paralelas y de sentido contrario es:

a) *Paralela a las componentes y del sentido de la mayor.*

b) *De intensidad igual a la diferencia de las intensidades* $R = F_3 - F_1$.

c) *El punto B es exterior al segmento AC, situado del*

lado de la fuerza mayor, y determina segmentos BA y BC que cumplen la condición

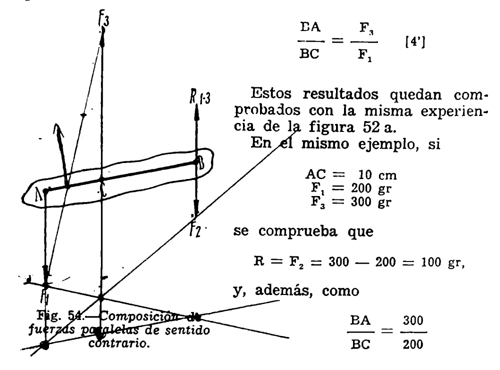


Fig. 54.—Composición de fuerzas paralelas de sentido contrario.

$$\frac{BA}{BC} = \frac{F_3}{F_1} \qquad [4']$$

Estos resultados quedan comprobados con la misma experiencia de la figura 52 a.

En el mismo ejemplo, si

$$AC = 10 \text{ cm}$$
$$F_1 = 200 \text{ gr}$$
$$F_3 = 300 \text{ gr}$$

se comprueba que

$$R = F_2 = 300 - 200 = 100 \text{ gr},$$

y, además, como

$$\frac{BA}{BC} = \frac{300}{200}$$

resulta:

$$\frac{BA - BC}{BC} = \frac{300 - 200}{200} = \frac{1}{2}$$

luego

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

y:

$$BC = 2AC = 20 \text{ cm}$$

4.—*Método gráfico para composición de fuerzas paralelas.*

Dadas las fuerzas F_1 y F_2, para determinar gráficamente las posiciones de la recta de acción de la resultante se representan la fuerza F_1 sobre la recta de acción de F_2 (F_1') y la fuerza F_2 sobre la recta de acción de F_1 (F_2'). La resultante pasa por el punto *O* de intersección de las rectas *MT* y *NS*

que unen el origen de cada vector trasladado, con el extremo del otro. Por semejanza de triángulos se demuestra fácilmente que

$$\frac{SO}{ON} = \frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}$$

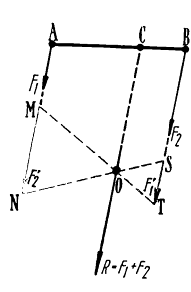


Fig. 55.—*Método gráfico para hallar la resultante de fuerzas paralelas de igual sentido.*

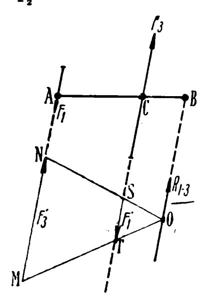


Fig. 56.—*Resultante de fuerzas paralelas de sentido contrario. Método gráfico.*

5.—*Descomposición de una fuerza en otras dos paralelas.*

a) Dada la fuerza R el problema consiste en hallar otras dos, X e Y, tales que:

$$X + Y = R$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{CB}{CA}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones resulta:

$$X = \frac{CB}{AB} \cdot R$$

$$Y = \frac{CA}{AB} \cdot R$$

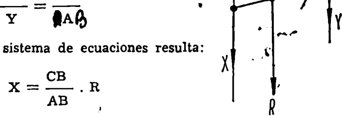


Fig. 57.—*Descomposición de una fuerza en dos paralelas.*

b) También puede presentarse el problema de hallar una fuerza

dada la resultante y una de las componentes; o sea: dados *R*, *X* y *AC*. calcular *Y* y *CB*.

Resulta:

$$Y = R - X$$

$$CB = \frac{X}{R-X} \cdot CA$$

§ 22. — **Composición de fuerzas aplicadas en diferentes puntos de un cuerpo rígido.**

De acuerdo con lo que hemos visto hasta ahora, la composición de fuerzas aplicadas en diferentes puntos de un cuerpo rígido se realiza teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

a) *El punto de aplicación de cada fuerza puede trasladarse a lo largo de su recta de acción.*

b) *El agregado de dos fuerzas iguales y contrarias, con la misma recta de acción, no modifica la resultante del sistema.*

Si se trata de componer fuerzas coplanares no concurrentes se componen dos de ellas (F_1 y F_2) (fig. 58) trasladándolas al punto O_1 de intersección; luego se compone esa primer

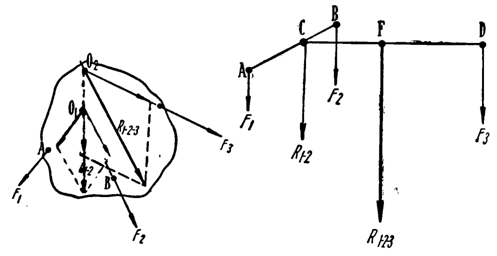


Fig. 58.—*Resultante de fuerzas no concurrentes.*

Fig. 59.—*Composición de fuerzas paralelas no coplanares.*

resultante $R_{1\text{-}2}$ con F_3 y se obtiene la resultante $R_{1\text{-}2\text{-}3}$, que pasa por el punto O_2, y así sucesivamente con todas las fuerzas del sistema.

Para la composición de fuerzas paralelas *no coplanares*, como cada dos de ellas determinan un plano, se las compone aplicando el criterio anterior y el método del § 21 (fig. 59).

En el caso más general puede ocurrir que las fuerzas no sean paralelas ni se corten sus rectas en acción. Su solución la indicamos más adelante (§ 32).

§ 23. — **Centro de gravedad.**

Hemos llamado *peso* de un cuerpo a la fuerza con que es atraído por la tierra. Esta fuerza es la resultante del conjunto de fuerzas paralelas que representan el peso de cada uno de sus elementos.

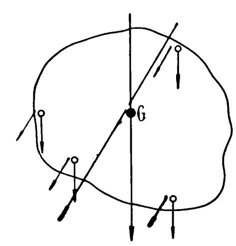


Fig. 60. — *Centro de gravedad.*

Para cada posición del cuerpo, la recta de acción del peso, que es siempre vertical, tendrá una cierta posición con respecto al mismo. Pero siempre pasará por un determinado punto, que se llama *centro de gravedad,* en el cual se supone aplicado el peso.

Se llama, pues, **centro de gravedad,** al punto por donde pasa la recta de acción del peso, cualquiera sea la posición del cuerpo.

En la figura 60 se han marcado, en negro y en rojo, los vectores representativos de las fuerzas de gravedad aplicadas a los diversos puntos de un cuerpo, para dos posiciones del mismo. La resultante de esas fuerzas (peso del cuerpo) pasa en ambas posiciones por el punto G (centro de gravedad).

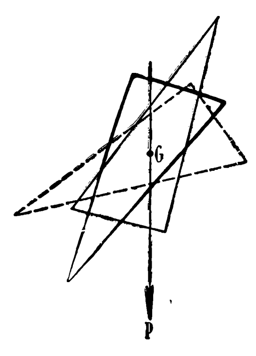


Fig. 61. — *Centro de gravedad de un triángulo.*

En los cuerpos homogéneos el centro de gravedad coincide con el centro de figura.

Es fácil comprender que si hay elementos de simetría, el centro de gravedad se encuentra sobre los mismos.

La figura 61 muestra la posición del centro de gravedad sobre cada una de ellas y a un tercio de su longitud, contado de una delgada chapa triangular homogénea. El punto G es aquel en que se cortan las tres medianas; está, por tanto, a partir del lado correspondiente.

Cambiando la posición del triángulo, el vector que representa su peso P conserva su posición vertical y pasa siempre por el punto G.

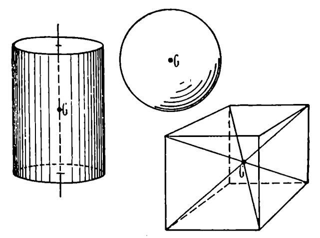


Fig. 62.—*Centro de gravedad de una esfera, un cilindro y un cubo.*

El centro de gravedad de una esfera homogénea coincide con su centro geométrico; el de un cilindro recto circular es el punto medio de su eje, y el de un cubo está en la intersección de sus diagonales, (fig. 62).

Para un cono recto circular y para una pirámide regular el centro G queda sobre la altura y a un cuarto de su longitud contada a partir de la base.

En caso de tratarse de cuerpos inhomogéneos o de forma irregular, la posición de G puede hallarse aplicando las reglas establecidas en el § 21 para la composición de fuerzas paralelas y del mismo sentido. Bastará para ello con determinar la posición del vector peso **P** como resultante de los pesos parciales de las diversas porciones del cuerpo: el punto por donde pasa para cualquier posición del cuerpo será G.

La ubicación exacta del punto G, puede hacerse analíticamente, en base a la fórmula [4], calculando sus coordenadas con respecto a una terna de ejes cartesianos de referencia.

También puede determinarse experimentalmente la posición del centro de gravedad, como veremos más adelante (§ 34).

El punto G puede quedar, en muchos casos, fuera del cuerpo.

CAPÍTULO III

MOMENTO DE FUERZAS — EQUILIBRIO

§ 24.— Momento de una fuerza.

Se llama momento de una fuerza con respecto a un punto al producto de la intensidad de la fuerza por la distancia del punto a la recta de acción de la fuerza.

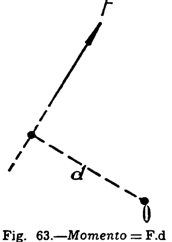


Fig. 63.—*Momento* = F.d

En el caso de la figura 63, el momento de la fuerza *F* con respecto al punto *O* es:

$$M = F \times d \qquad [1]$$

Si la fuerza se mide en *Kgr* y la distancia en *m*, el momento resulta en kilográmetros (Kgm). En general se medirá por el producto de la unidad de fuerza, por la unidad de longitud.

Gráficamente, el momento está representado por el doble del área del triángulo determinado por el vector representativo de la fuerza v el punto *O* (fig. 64). Habrá que tener en cuenta las escalas del dibujo.

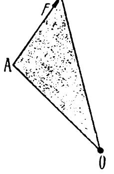


Fig. 64.— *M* = 2. *área ABC*.

Se suele atribuir un signo a los momentos, pues según el sentido de la fuerza, tiende a mover al cuerpo en que está aplicada, alrededor de *O* en el sentido que giran las agujas de un reloj o en el contrario. Convendremos en tomar este último como sentido positivo, entendiendo que se trata de una convención completamente arbitraria.

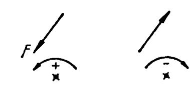


Fig. 65.

§ 25.—**Teorema de los momentos.** (*Teorema de Varignon*).

El teorema de los momentos dice que el momento con respecto a un punto, de la resultante de un sistema de fuerzas, es igual a la suma de los momentos de las componentes.

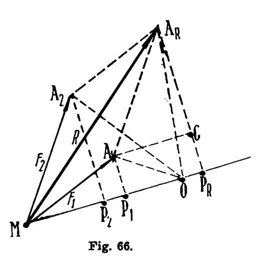


Fig. 66.

Lo demostraremos para el caso de dos fuerzas concurrentes.

Sean F_1 y F_2 las fuerzas cuya resultante es R. Tomemos arbitrariamente un punto cualquiera O del plano.

Decimos que el momento de R con respecto a O es igual a la suma de los momentos de F_1 y F_2 con respecto a O.

En efecto: el momento de R está representado por el doble del área del triángulo OMA_R.

Los momentos de F_1 y F_2 están representados por el doble de las áreas de los triángulos OMA_1 y OMA_2:

$$M_{F1} = 2 \cdot \text{área } O\overset{\Delta}{M}A_1 = \overline{OM} \times \overline{P_1A_1}$$

$$M_{F2} = 2 \cdot \text{área } O\overset{\Delta}{M}A_2 = \overline{OM} \times \overline{P_2A_2}$$

Sumando:

$$M_{F1} + M_{F2} = \overline{OM} \times \overline{P_1A_1} + \overline{OM} \times \overline{P_2A_2} = \overline{OM}\ (\overline{P_1A_1} + \overline{P_2A_2})$$

Pero:

$$\overline{P_1A_1} + \overline{P_2A_2} = \overline{CP_R} + \overline{CA_R} = \overline{A_R\ P}$$

$(\overline{CA_R} = \overline{A_2\ P_2}$ por ser iguales los triángulos $A_2\overset{\Delta}{M}P_2$ y $A_1\overset{\Delta}{A}_R\ C)$

Luego:

$$M_{F1} + M_{F2} = \overline{OM} \times \overline{A_R\ P_R} = M_R$$

como deseábamos demostrar.

Este resultado puede extenderse a un sistema formado por varias fuerzas, y se tendrá presente que los momentos se sumarán con su signo, es decir, se hará su suma algebraica.

§ 26.— **Equilibrio de la palanca.**

1.— Un cuerpo rígido de forma cualquiera con un eje fijo *O*, sometido a fuerzas tales como P y Q, que tienden a hacerlo girar en sentido contrario, constituye una **palanca**. Generalmente, las palancas tienen forma de barra, siendo el efecto de su peso despreciable ante el de las fuerzas P y Q, que se llaman *potencia* y *resistencia* [1].

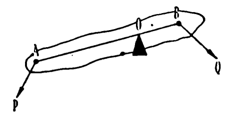


Fig. 67. — *Palanca.*

Nos limitaremos al caso en que las fuerzas P y Q sean coplanares y el eje *O* sea perpendicular al plano que determinan.

En la figura 67 este plano es el del dibujo; una recta AB, que pasa por el punto *O* en que el eje fijo lo corta, determina, sobre las rectas de acción de las fuerzas, dos puntos A y B, en los cuales podemos suponerlas aplicadas.

Es evidente que la palanca estará en equilibrio cuando la resultante de las fuerzas aplicadas pase por el punto O, ya que el apoyo producirá una reacción igual y contraria, que anulará su efecto.

Puede comprobarse que tal condición se cumple cuando el momento de la potencia P con respecto al punto O es igual al momento de la resistencia Q con respecto a dicho punto.

Como ambas fuerzas tienden a producir rotación en sentido contrario, sus momentos serán uno positivo y el otro negativo. (En la figura 67, el momento de P es positivo y el de Q es negativo); y, por lo tanto, la suma algebraica de ambos momentos será nula en el caso de equilibrio.

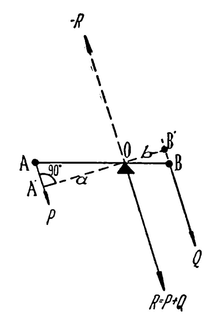
a) Comprobación para el caso en que las fuerzas P y Q son paralelas.

Si la resultante *R* de las fuerzas P y Q pasa por *O*, siendo anulada por la reacción — *R* del apoyo, debe tenerse, de acuerdo a lo establecido en el § 21 (fig. 68).

(1) Se suelen clasificar las palancas según la posición relativa de los puntos: de apoyo O y de aplicación de las fuerzas P y Q

Son de primer género las que tienen el apoyo entre P y Q; de segundo, cuando está Q entre P y O (resistencia en el medio), y de tercero, cuando está P entre Q y O (potencia en el medio).

Con el significado: P = potencia = fuerza activa, que se aplica para equilibrar a Q = resistencia o carga a vencer.



$$\frac{OA}{OB} = \frac{Q}{P} \qquad [2]$$

Trazando por *O* la recta A'B' perpendicular a las direcciones de *P* y *Q* se determinan los triángulos rectángulos semejantes OAA' y OBB', en los que:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

sustituyendo en lo anterior tenemos:

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{Q}{P}$$

o también

$$P \times OA' = Q \times OB'$$

Como OA' = a y OB' = b son los brazos de momento, o de palanca, de las fuerzas *P* y *Q* con respecto al punto O, podemos escribir como condición de equilibrio:

$$P \cdot a = Q \cdot b \qquad [3]$$

momento de la potencia = momento de la resistencia

y también, teniendo en cuenta los signos de los momentos:

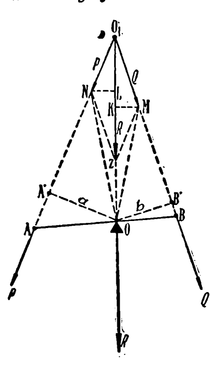
$$P \; a - Q \cdot b = 0 \qquad [4]$$

suma algebraica de los momentos igual a cero



Fig. 69.—*Comprobación de la condición de equilibrio en la palanca.*

b) Comprobación para el caso en que las fuerzas coplanares P y Q son concurrentes.



Transportemos las fuerzas P y Q al punto O_1, de encuentro de sus rectas de acción y determinemos su resultante R (figura 70).

Si esta fuerza pasa por el punto de apoyo *O*, habrá equilibrio por efecto de la reacción — *R* que la anula.

Trazando por O los brazos OA' = a y OB' = b de las fuerzas probaremos que en este caso también debe tenerse como condición de equilibrio la igualdad del valor de los momentos.

$$P \cdot a = Q \cdot b$$

En efecto, los valores de estos momentos están representados por el doble del área de los triángulos ONO_1 y OMO_1, respectivamente, según se ha visto en el § 24.

Pero dichos triángulos son equivalentes, ya que pueden considerarse con base común OO_1 y con alturas MK y NL iguales (1).

Por tanto, los momentos representados por ellos serán iguales en valor absoluto, aunque de signo contrario, cumpliéndose la condición enunciada bajo su forma $P \cdot a - Q \cdot b = 0$.

2.—*Caso de tres o más fuerzas aplicadas.*—En general, además de las fuerzas *P* y *Q*, debe tenerse en cuenta el peso propio π de la palanca como aplicado en su centro de gravedad G, y pueden existir otras fuerzas más, distribuídas arbitrariamente.

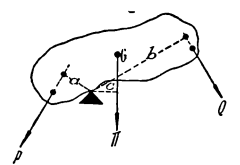


Fig. 71.—*Palanca pesada.*

(1) NK y NL son las alturas de los triángulos iguales O_1MZ y O_1NZ, de base común O_1Z, en el paralelogramo de las fuerzas P y Q.

Refiriéndonos al caso de fuerzas coplanares, actuando en un plano perpendicular al eje *O*, es posible probar que, para que haya equilibrio, debe cumplirse la siguiente condición general:

La suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas aplicadas a la palanca debe ser igual a cero, condición expresada por la fórmula:

$$\Sigma M = 0 \qquad [5]$$

en la que ΣM representa la suma de los momentos: $\Sigma M = P \cdot a - Q \cdot b - \pi \cdot c$, en el caso de la figura 71.

(Se demuestra aplicando lo expuesto en el § 22 para fuerzas paralelas y el teorema de los momentos (§ 25) para fuerzas concurrentes).

APLICACIONES

I.—Sobre una barra cilíndrica AB, de 3 metros de longitud y 50 kgr. de peso, con su apoyo a 1 metro de A, actúa en A una fuerza vertical de 80 kgr. Calcular la fuerza que en *B* equilibra el sistema.

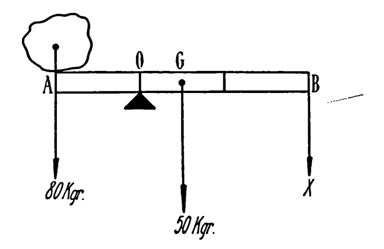


Fig. 72.

Aplicando la fórmula [5]:

$$80 \times 1 - 50 \times 0{,}5 - X \times 2 = 0$$

$$X = \frac{80 - 25}{2} \text{ kgr} = 27{,}5 \text{ kgr}$$

II.—Se tiene una barra de longitud $l = 4$ m apoyada en sus extre-

mos. cuyo peso propio es $P = 60$ kgr y con una carga $P_1 = 500$ kgr a 1,5 m del apoyo A. Calcular las reacciones X e Y en los apoyos.

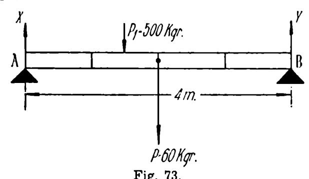


Fig. 73.

Aceptando que las reacciones son verticales se tiene:

$$X + Y = P + P_1 .$$

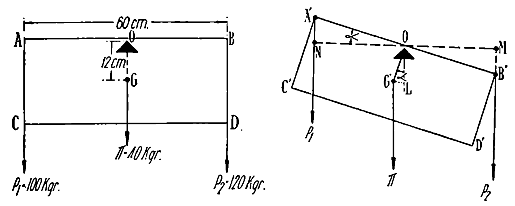
Aplicando momentos como palanca apoyada en *A* y con la fuerza Y reemplazando al apoyo B:

$$+ Y \times 4 - 500 \times 1{,}5 - 60 \times 2 = 0$$

$$Y = \frac{500 \times 1.5 + 60 \times 2}{4} = 217.5 \text{ kgr}$$

$$X = 500 + 60 - 217.5 = 342.50 \text{ kgr}$$

III.—Una barra cilíndrica, cuyo perfil longitudinal es A B C D, está suspendida de un eje que pasa por O, punto medio de AB. [fig. 74].



a) *No está en equilibrio.* b) *En su posición de equilibrio.*

Fig. 74.—*Palanca pesada.*

Bajo la acción de su peso π estará en equilibrio cuando AB y CD estén horizontales, (pues entonces la recta de acción del peso pasará por O).

Suponiendo que: $AB = 60$ cm

$GO = 12$ cm y $\pi = 40$ kgr, se desea establecer la nueva posición de equilibrio cuando en los puntos A y B se apliquen pesos:

$P_1 = 100$ kgr y $P_2 = 120$ kgr, respectivamente.

Es evidente que las fuerzas desiguales P_2 P_1 producen momentos diferentes con respecto a O, punto equidistante de ellas.

Si la barra no tuviera peso, giraría hasta que *AB* quedara vertical con el peso mayor P_2 colgado en la parte de abajo.

Pero en el caso real, en cuanto se inicia el giro de la barra, el peso π, que pasa siempre por el centro de gravedad G, deja de pasar por O, originando un momento positivo que se suma al de P_1.

El equilibrio se restablece después que la barra ha girado un ángulo α tal que la suma de los momentos de π y de P_1 sea igual al momento de P_2 respecto a *O*. La recta AB toma la posición A'B' (figura 74 b).

La condición de equilibrio es:

$$P_1 \times ON + \pi \times G'L - P_2 \times OM = 0 \quad (\Sigma M = 0)$$

Como el ángulo α girado por AB es igual al que gira cualquier otra recta, tal como OG (cuerpo rígido), se tiene, aplicando funciones trigonométricas:

$$ON = OM = OA' \,.\, \cos\alpha = OA \cos\alpha$$
$$G'L = OG' \,.\, \operatorname{sen}\alpha = OG \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

y sustituyendo y trasponiendo:

$$\pi \,.\, OG \,.\, \operatorname{sen}\alpha = (P_2 - P_1).\, OA \,.\, \cos\alpha$$

y también:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(P_2 - P_1)\ OA}{\pi \,.\, OG}$$

o lo que es lo mismo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(P_2 - P_1) \times OA}{\pi \times OG} = \frac{(120 - 100)\ .\ 30}{40 \times 12} = \frac{600}{480} = 1{,}25$$

El equilibrio se restablece cuando la barra ha girado un ángulo $\alpha = 51°20'$ cuya tangente vale 1,25.

§ 27.— **Balanza.**

1.— La balanza es un instrumento usado para determinar el *peso normal* de los cuerpos, comparándolo con el de pesas contrastadas, referidas al Kgr patrón.

Consta de una palanca de brazos iguales, llamada *cruz de la balanza,* apoyada por un eje, que es la arista de un

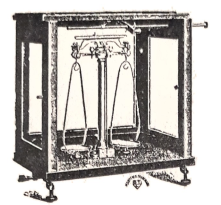


Fig. 75. — *Modelo de balanza de precisión.*

prisma triangular de acero o ágata (cuchilla), sobre una pequeña plancha plana del mismo material.

De los extremos A y B de la cruz (fig. 76) penden dos platillos, suspendidos mediante un dispositivo análogo al anterior, con el que se reducen al mínimo los roces. En estos platillos se colocan las pesas y los cuerpos cuyo peso normal se busca.

Las desviaciones que experimenta la cruz se observan por el desplazamiento sobre una escala del extremo de una varilla fijada a ella, que se llama *fiel.*

La figura 75 representa un modelo de balanza de laboratorio protegida por una caja de madera y vidrio con tornillos de nivelación para verticalizar la columna central de sostén de la cruz.

La figura 76 representa en esquema una balanza.

Siendo los brazos OA y OB iguales y los platillos de igual peso, la balanza queda en equilibrio en una posición tal que el centro de gravedad de la cruz está sobre la vertical del punto O del eje de apoyo.

Para simplificar el problema, supondremos que G es el centro de gravedad del sistema formado por la cruz, el fiel y los dos platillos. Por la simetría de las cargas, este punto queda sobre la misma vertical de *O.*

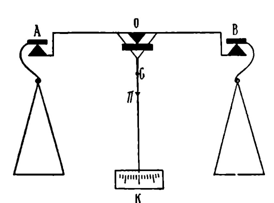


Fig. 76. — *Esquema de balanza.*

Colocando cargas iguales en ambos platillos, la posición del fiel sobre la escala no debe cambiar, siempre que la cruz sea rígida (cosa que en la práctica puede aceptarse dentro de ciertos límites de carga); pues el centro de gravedad del sistema total queda siempre sobre la vertical de O, la que sigue siendo eje de simetría con respecto a las cargas.

Aplicando la condición de equilibrio de la palanca podemos también decir que el fiel seguirá en el mismo punto K de la escala, siempre que agreguemos en los platillos pesas cuyos momentos con respecto a *O* sean iguales.

Y como los brazos *OA* y *OB* los hemos supuesto iguales, los pesos P_1 y P_2 colocados en. los platillos también deben serlo para que eso suceda.

Para pesar los cuerpos se comienza por observar la posición del extremo del fiel sobre la escala, estando los platillos descargados. Si la balanza está en buenas condiciones y nivelada, el fiel debe detenerse en la división media K, o próximo a ella.

Observada la posición de equilibrio, se coloca en un platillo el cuerpo *C*, cuyo peso normal Pn se busca, y en el otro se agregan pesas contrastadas de una buena caja de pesas, hasta que el fiel vuelva al mismo punto K.

Obtenido este resultado, se tiene $P_n = P_1$.

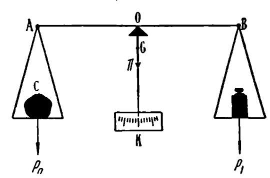


Fig. 77. — *Realización de una pesada.*

2. *Sensibilidad.* — Según el valor del peso π de la cruz, del fiel y los platillos y la distancia *OG* del eje de rotación al centro de gravedad G, variará la dificultad para volver exactamente al punto de equilibrio.

Si suponemos que los puntos A, B y O están, en la posición de equilibrio inicial, sobre la misma recta horizontal, una diferencia de peso $P_1 - P_n$ hará girar la cruz y el fiel de un ángulo α, tal que se cumple la condición. (Ver § 26-2).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(P_1 - P_n) \cdot OA}{\pi \cdot OG}$$

Llamando *l* al brazo OA = OB de la balanza y *d* la distancia OG, se tiene.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(P_1 - P_n) l}{\pi \cdot d} \qquad [6]$$

Llámase sensibilidad e de la balanza *al ángulo de que giran la*

cruz y el fiel, cuando la diferencia de pesos aplicados en los platillos es una unidad (por ej. un miligramo).

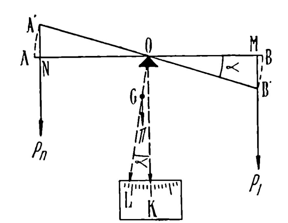


Fig. 78. — *Posición de equilibrio de la balanza.*

Teniendo en cuenta que se observan sólo valores pequeños de la desviación, para el caso considerado es:

$$e = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{P_1 - P_n} = \frac{1}{\pi \, d} \qquad [7]$$

Si los puntos O, A y B no están sobre la misma horizontal, la expresión de e es más complicada, pero su definición no cambia.

3. *Pesadas con balanzas muy sensibles.*

Con balanzas muy sensibles se emplean pesas especiales en forma de *jinetillos* que se colocan con pinzas o soportes adecuados sobre divisiones del brazo de la cruz.

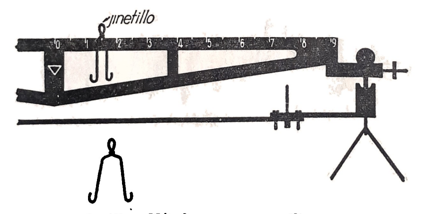


Fig. 79. — *Método para pesar miligramos.*

La figura 79 muestra un brazo *OB dividido* en 20 partes, numeradas de 1 a 10, alternativamente.

Un jinetillo de peso 10 mgr, colocado en la división 1,5, produce el mismo momento respecto a *O* que una pesa igual a 0,15 × 10 = 1,5 mgr aplicada en el platillo. La división indicada permite, usando dicho jinetillo, variar el peso de ½ en ½ miligramo. De este modo puede volverse el fiel al punto de partida K.

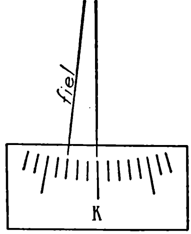


Fig. 80.

Si se determina previamente la sobrecarga *S* que, agregada en un platillo, hace correr al fiel de *una* división sobre su escala, no será necesario volver al punto K para conocer el peso P_n del cuerpo.

Si las pesas P_1 aplicadas en *B* llevan al fiel a la posición que indica la figura 80, 3 divisiones a la izquierda de K, la diferencia de pesos será:

$$P_1 - P_n = 3 \times S$$

(*S* se lo determina poniendo una sobrecarga conocida *C* y viendo el número *n* de divisiones de que se corre el fiel; para pequeños corrimientos $S = \frac{C}{n}$

4. — *Balanzas inexactas.*

Si los brazos no son rigurosamente iguales o no son rígidos, la vuelta a la posición de equilibrio no implica la igualdad de los pesos P_n y P_1, sino que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas a la balanza vuelve a ser igual a cero.

Para pesar exactamente con balanzas de brazos diferentes puede emplearse el *método de sustitución o de Borda,* que consiste en equilibrar el cuerpo poniendo municiones u otra

Fig. 81. — *Método de Borda.*

tara en un platillo, y luego sacar el cuerpo y reemplazarlo con pesas P_1 hasta volver el fiel al mismo punto K.

Es evidente que aunque los brazos sean desiguales debe tenerse $P_1 = P_n$.

También se emplea el *método de Gauss* (*doble pesada*). Consiste en hallar el peso P_1 del cuerpo colocado en uno de los platillos y luego el peso P_2 del mismo colocado en el otro platillo. Siendo a_1 y a_2 los brazos desiguales de la balanza, debe tenerse:

$$P_1 a_1 = P_n a_2$$
$$P_n a_1 = P_2 a_2$$

y por tanto:

$$\frac{P_1}{P_n} = \frac{P_n}{P_2} \therefore P_n = \sqrt{P_1 P_2} \qquad [8]$$

Si P_1 y P_2 son poco diferentes, se toma, con suficiente aproximación, el promedio:

$$P_n = \frac{P_1 + P_2}{2} \qquad [9]$$

En las balanzas llamadas *de precisión*, de gran sensibilidad (permiten pesar hasta el décimo de miligramo) alcanza a apreciarse el efecto de diferencias del orden del micrón en las longitudes de los brazos.

§ 27 a). — **Otros tipos de balanza.**

a) *Romana* (figura 82 a). Es una balanza de brazos desiguales, en que

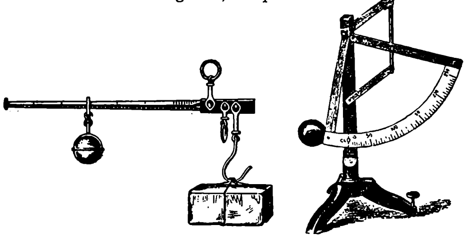


Fig. 82. — a) *Romana* b) *Pesacartas.*

el momento del peso a determinar se equilibra modificando el brazo de una pesa constante llamada *pilón*. Sobre el brazo graduado se lee directamente el peso del cuerpo.

El pesacartas (fig. 82 b), se basa en el mismo principio.

b) *Balanza de Roberval* (figura 83). Está formada por un cuadrilátero articulado, cuyos lados horizontales giran alrededor de los ejes O y O'.

En esta forma, los platillos se desplazan paralelamente a sí mismos.

El fiel vuelve a la posición de equilibrio con cargas iguales en los platillos.

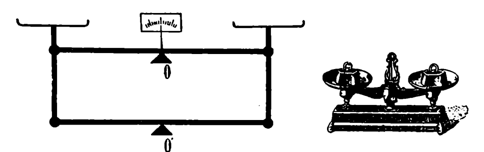


Fig. 83 a y b. — *Esquema y balanza Roberval.*

c) *Báscula.* Se utiliza para pesar cargas muy grandes que se colocan sobre una plataforma horizontal DF.

Esta plataforma se apoya en el punto O_1 de la palanca O_2E, y cuelga, por la varilla *BD*, de la palanca AC. A su vez, O_2E está apoyada en O_2 y colgada de A por la varilla *AE*.

Para que el peso sea independiente de su posición sobre la plataforma, ésta debe desplazarse paralelamente a sí misma, lo que se consigue construyendo las palancas de modo que se cumpla la condición:

$$\frac{O_2 O_1}{O_2 E} = \frac{OB}{OA} \quad [10]$$ (1)

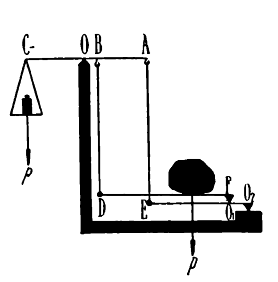


Fig. 84 a. — *Esquema de báscula.*

Colocada la carga en una posición cualquiera, se descom-

(1) Por semejanza de triángulos es fácil llegar a la condición de la fórmula [10]

pondrá en dos fuerzas X e Y aplicadas en O_1 y en D, o lo que es lo mismo en *B*.

La fuerza Y aplicada en O_1 actúa sobre la palanca O_2E

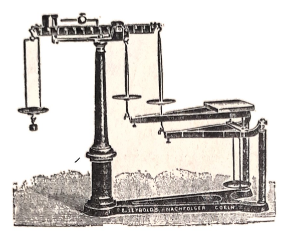


Fig. 84 b.— *Modelo de báscula.*

y se equilibrará con una fuerza Z aplicada en E (o en A), tal que:

$$Z = \frac{O_2\,O_1}{O_2E}\,Y = \frac{OB}{OA}\,.\,Y \qquad \text{[por 10]}$$

El equilibrio de la palanca *AOC* impone la condición:

$$p\,.\,OC = X\,.\,Ob + Z\,.\,OA$$

estableciendo, para una rotación de la palabra *AC*, la condición: desplazamiento de B = desplazamiento de O_1. En efecto (figura 85), debe ser: $O_1O'_1 = DD'$

$$O_1O'_1 = \frac{O_1O_2}{O_2E}\,.\,EE' = \frac{O_1O_2}{O_2E}\,.\,AA'$$

Además:

$$DD' = \frac{OB}{OA}\,.\,AA'$$

e igualando

$$\frac{O_1O_2}{O_2E} = \frac{OB}{OA}$$

Fig. 85.

o sea:

$$p \cdot OC = X \cdot OB + Y \frac{OB}{OA} OA = (X + Y) OB$$

y como $X + Y = P$:

$$p \cdot OC = P \cdot OB \qquad [11]$$

Por tanto, el peso buscado actúa sobre la palanca AOC como si actuara todo en B.

$$P = \frac{OC}{OB} p \qquad [12]$$

§ 28.— **Equilibrio de las poleas fija y móvil.**

1.— Un disco que gira alrededor de un eje fijo *O*, sujeto de un soporte mediante una chapa, y que tiene una garganta por donde pasa un hilo, una soga, un cable o una cadena, constituye una polea fija (fig. 86).

De un extremo de la soga o cadena pende un peso *Q* y en el otro se ejerce una fuerza *P* para equilibrarlo o levantarlo. Cualquiera sea la posición de la soga, la polea funciona como una palanca de brazos OA y OB iguales. Por la condición a cumplir por los momentos debe tenerse, en el caso de equilibrio.

$$P = Q \qquad [13]$$

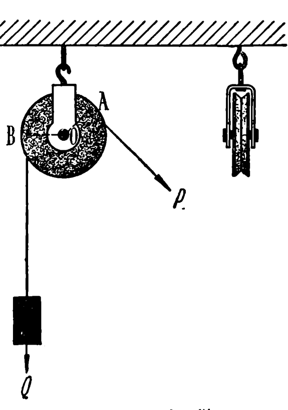


Fig. 86.—*Polea fija.*

2.—Una polea con una carga *Q* colgada de su chapa y sostenida por una soga con un extremo M fijado a un soporte y el otro sometido a la acción de la fuerza *P*, constituye una polea móvil.

Generalmente, la polea móvil va acoplada a una polea

fija, que permite dar una dirección conveniente a la fuerza P, sin cambiar su valor (Fig. 87 b).

Cuando los dos tramos de la soga son verticales, la fuerza *P* necesaria para equilibrar la carga Q es:

$$P = \frac{Q}{2} \qquad [14]$$

Esto surge de la observación de la figura 87 (a); las dos

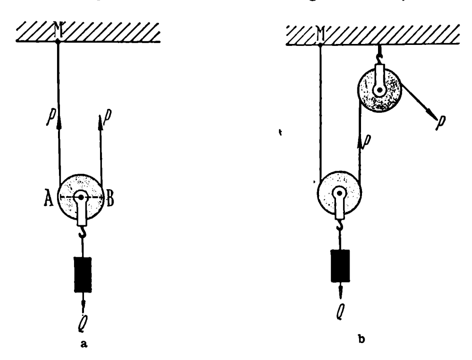


Fig. 87. — *Polea móvil con cuerdas paralelas.*

fuerzas P deben ser iguales cuando la polea está en equilibrio.

Como su resultante, de intensidad igual a su suma, debe ser igual en valor a *Q*, cada una debe valer la mitad, o sea $\frac{Q}{2}$

Si el peso de la polea no es despreciable, se lo considera incluído en la carga Q.

Si las fuerzas P no son paralelas y verticales, su valor es mayor que $\frac{Q}{2}$ y se obtiene aplicando la regla del paralelogramo. (Se descompone la fuerza — *Q* en las direcciones de las P) (figura 88).

Resulta, por ser un rombo el paralelogramo:

$$P = \frac{Q/_2}{\cos \alpha} = \frac{Q}{2 \cos \alpha} \quad [15]$$

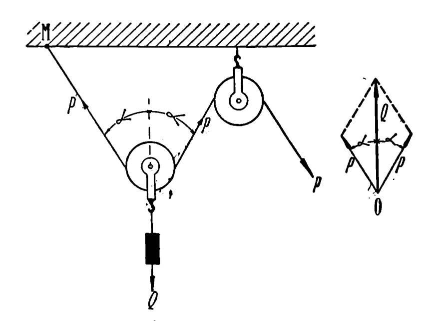


Fig. 88. — *Polea móvil con cuerdas no paralelas.*

§ 28. — **Combinaciones de poleas.**

1) *Aparejo factorial o en serie.*

Está formado por *n* poleas fijas sobre una misma montura y otras tantas poleas móviles también colocadas sobre una misma montura, de la cual pende la carga a levantar.

La resistencia *Q* está formada por dicha carga y el peso de la parte móvil del aparejo.

La figura 89 muestra dos tipos de aparejos con tres poleas fijas y tres móviles. Es fácil comprender que la fuerza en equilibrio *P* es, en ese caso, la sexta parte de la fuerza Q, pues está sostenida por seis cuerdas cuyas tensiones se igualan. En general, siendo *n* el número de poleas móviles, la fuerza P será:

$$P = \frac{Q}{2n} \quad [16]$$

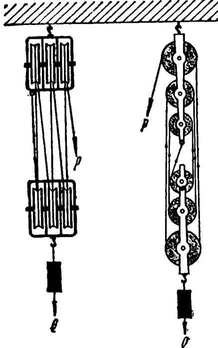




Fig. 89. — *Aparejo factorial.*

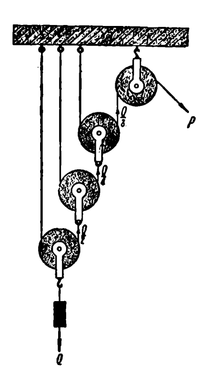


Fig. 90. — *Aparejo potencial.*

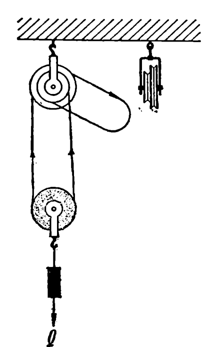


Fig. 91.—*Aparejo diferencial.*

2) *Aparejo potencial.*

Son n poleas móviles. La cuerda que pasa por cada una de ellas tiene un extremo fijo a un soporte común y el otro a la polea siguiente. Considerando despreciable el peso de las poleas, la primera reduce a la mitad de Q la fuerza de equilibrio; la segunda la reduce a $\frac{Q}{4}$; la tercera a $\frac{Q}{8}$, y así sucesivamente; de modo que si son n las poleas móviles se verifica:

$$P = \frac{Q}{2^n} \qquad [17]$$

3) *Aparejo diferencial.*

Consiste en una polea móvil y una polea fija formada por otras dos rígidamente unidas y de distinto radio,

Aplicando momentos a la polea fija (fig. 91) se tiene:

$$\frac{Q}{2} R - PR - \frac{Q}{2} r = 0$$

$$PR = \frac{Q}{2} R - \frac{Q}{2} r = \frac{Q}{2} (R - r)$$

por tanto:

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R - r}{R} \qquad [18]$$

Se deduce de esta fórmula que la fuerza P disminuye con la diferencia $R - r$ de los radios; pero debe destacarse que también disminuye la velocidad con que sube Q, y si $R = r$ es $P = O$, pero Q no sube.

§ 29.— **Equilibrio del torno.**

Un cilindro móvil alrededor de su eje, bajo la acción de una fuerza P aplicada en una manivela situada en su extremo y con una soga arrollada de la que pende un peso Q, constituye un mecanismo llamado *torno*. Sirve para elevar pesos con fuerzas menores (fig. 92).

El cálculo del valor de la fuerza de equilibrio P se hace aplicando las condiciones de equilibrio de la palanca a una sección transversal indicada en la figura 92 b.

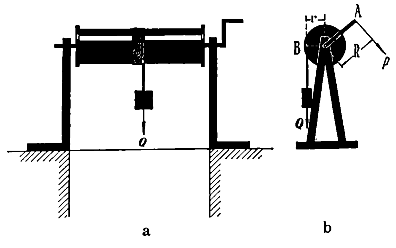


Fig. 92.—*Torno.*

Estando el torno formado por piezas rígidas puede establecerse que en el caso de equilibrio los momentos de las

fuerzas P y Q con respecto al eje *O* son iguales y de signo contrario.

En valor absoluto se tiene:

$$P \times OA = Q \times OB \text{ o sea: } P \cdot R = Q \cdot r$$

y por lo tanto:

$$P = Q \frac{r}{R} \qquad [19]$$

§ 30.— **Equilibrio en el plano inclinado.**

Un plano AB que forma un ángulo α con el horizonte constituye un plano inclinado (fig 93)

$l = AB$ es su longitud, $b = AC$ su base, $h = BC$ su altura

y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$ su pendiente.

Un cuerpo de peso *P* colocado sobre él puede ser sostenido con una fuerza *F'* menor que el peso.

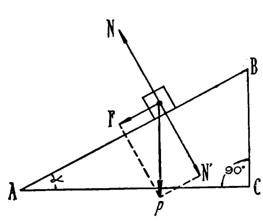


Fig. 93 a.—*Equilibrio en el plano inclinado.*

Para calcular la fuerza de equilibrio *F'* debemos tener en cuenta que el plano aplica al cuerpo una fuerza de reacción que, no habiendo resistencias de rozamiento, es normal o perpendicular a la superficie AB.

Teniendo en cuenta esto, descompondremos el peso *P* del cuerpo en dos fuerzas, una *N'* en dirección normal al plano AB y otra *F* paralela al mismo.

La componente N' será equilibrada por la reacción igual y contraria N del plano, quedando sólo la componente *F*, que hará deslizar el cuerpo hacia el punto A.

Para evitar este movimiento, bastará aplicar una fuerza ***F'*** igual y contraria a ***F***, que será la fuerza de equilibrio buscada.

Observando el paralelogramo de fuerzas construído para descomponer ***P*** en ***N'*** y ***F***, se ve que es un rectángulo y que los vectores ***P*** y ***N'*** forman el ángulo α de inclinación del plano AB sobre el horizonte.

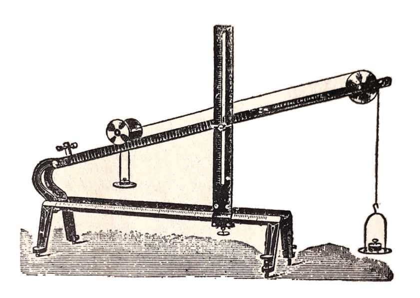


Fig. 93 b.—*Modelo de plano inclinado para verificar las leyes del equilibrio.*

(P ⊥ AC y N' ⊥ AB) (fig. 93 a).

Los triángulos LSG y ABC (fig. 94), son semejantes, pues son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual.

Luego:

$$\frac{GL}{GS} = \frac{BC}{AB} \quad y \quad \frac{LS}{GS} = \frac{AC}{AB}$$

o sea:

$$\frac{F}{P} = \frac{h}{l} \quad y \quad \frac{N}{P} = \frac{b}{l} \qquad [20]$$

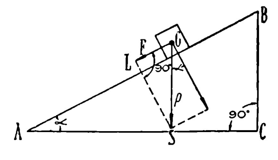


Fig. 94.

teniendo en cuenta que: $\frac{h}{l} = \text{sen } \alpha$ y $\frac{b}{l} = \cos \alpha$

se tiene:

$$F = P \frac{h}{l} = P \text{ sen } \alpha \qquad [21]$$

$$N = P \frac{b}{l} = P \cos \alpha$$

Ejemplo: Un cuerpo de 250 kgr está apoyado sobre un plano de inclinación $\alpha = 30°$. Calcular la fuerza que lo mantiene en equilibrio y la reacción del plano, suponiendo nulo el frotamiento.

$$F' = 250 \times \text{sen } 30° = 250 \frac{1}{2} = 125 \text{ Kgr.};$$

$$N' = 250 \times \cos 30° = 250 \frac{\sqrt{3}}{2} = 216 \text{ Kgr.};$$

§ 31. — Cuplas.

1.— Un sistema de dos fuerzas paralelas, de igual intensidad y sentido contrario, constituye una cupla o par de fuerzas.

Aplicando las reglas para la composición de fuerzas paralelas, la intensidad de la resultante, igual a la suma algebraica de las intensidades, será nula.

En cuanto a la recta de acción de la resultante, si nos valemos de la fórmula (4') § 21 - 3 para determinar su posición en el caso de dos fuerzas paralelas y de sentido contrario, en condiciones tales que una de ellas modifica su intensidad acercándose a la de la otra, verificaremos que, a medida que las intensidades se aproximan a un único valor, la resultante se aleja indefinidamente. En el límite, las fuerzas se igualan y la resultante quedaría indefinidamente alejada, aunque ya carece de sentido hablar de r e s u l t a n t e, pues su valor se ha hecho nulo.

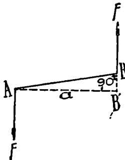


Fig. 95.—*Cupla.*

Sin embargo, el efecto de una cupla no es nulo sobre el cuerpo en que actúa, pues puede producir rotaciones; se caracterizará, entonces, no por una resultante, sino por u n m o m e n t o.

Momento de una cupla es el producto de una de sus fuerzas F por la distancia que separa ambas rectas de acción (fig. 95).

$$M = F \times a \qquad [22]$$

Es fácil demostrar que el momento de la cupla, o sea la suma algebraica de los momentos de sus fuerzas con respecto a *cualquier punto* de su plano, es un valor constante igual a $F \times a$.

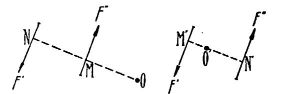


Fig. 96.—*Momento de una cupla.*

En efecto, sea un punto O exterior a las fuerzas; trazando OMN perpendicular a sus rectas de acción se tiene la suma de momentos:

$$+ F'' \times ON - F''' \times OM = F\ (ON - OM) = F \times MN = F\ .\ a$$

Tratándose de un punto interior O', los dos momentos son positivos en el caso de la figura 96 y su suma da:

$$F' \times O'M' + F'' \times O'N' = F\ (O'M' + O'N') = F\ .\ M'N' = F\ .\ a$$

2.— *Representación vectorial.*

Una cupla se representa por un *vector perpendicular a su plano* (o sea dirigido en la dirección común a los ejes de las rotaciones que podría producir) y cuyo *módulo es el momento.*

$$M = F\ .\ a.$$

El vector tiene un sentido tal que, vista desde su extremidad, la cupla tiene momento positivo.

Un tirabuzón girando en el sentido de rotación de la cupla progresa en el sentido del vector momento que la representa.

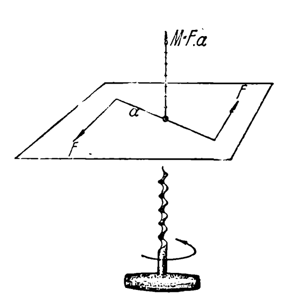
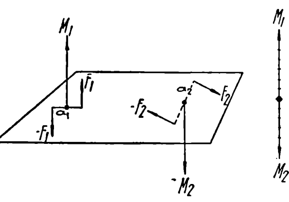


Fig. 97. *Representación vectorial del momento de una cupla.*

3.—*Composición de cuplas.*

Aplicando las reglas establecidas para la composición de fuerzas, se demuestra que una cupla puede trasladarse libremente en su plano sin que cambie su efecto. Dos cuplas coplanares pueden trasladarse hasta que hagan paralelas las direcciones de sus fuerzas y luego pueden componerse éstas dos a dos, obteniendo como resultante una nueva cupla.

Es más cómodo el empleo de los vectores representativos para hallar esta resultante; estos vectores pueden trasladarse paralelamente a sí mismos hasta poner en contacto sus orígenes (lo que equivale al traslado de las cuplas).



Fg. 98.—*Composición de cuplas coplanares.*

Dos cuplas coplanares de momentos $M_1 = F_1\ a_1$ y $M_2 = F_2\ a_2$ se componen trasladando sus vectores representativos hasta que queden en contacto sus orígenes, en un punto (figura 98).

El vector resultante será de la misma dirección de los componentes, del sentido del mayor M_2 y de módulo igual a la suma algebraica de los componentes:

$$M_R = F_1\ a_1 - F_2\ a_2$$

Si las cuplan actúan en planos paralelos de un cuerpo rígido también su resultante es una cupla de vector paralelo a los componentes y de momento igual a la suma algebraica de los de aquéllos.

Tratándose de cuplas que actúan en planos no paralelos, los vectores representativos se componen con la regla del paralelogramo (figura 99).

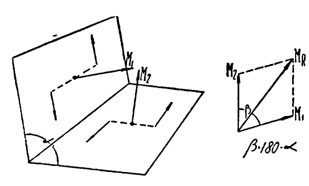


Fig. 99.—*Composición de cuplas no coplanares.*

§ 32.—**Equilibrio de un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas cualesquiera.**

a) Traslación paralela de fuerzas.

Si imaginamos una fuerza F aplicada en un punto A de un cuerpo,

podemos siempre trasladarla paralelamente a sí misma a otro punto tal como B (figura 100).

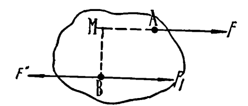


Fig. 100.—*Traslación de F desde A hasta B.*

En efecto, imaginemos aplicadas en B dos fuerzas F_1 y F" iguales y paralelas a F y de sentido contrario; el sistema de las tres fuerzas F, F_1 F" es equivalente a la sola fuerza F, ya que las dos últimas se equilibran.

Pero este sistema puede considerarse como formado por la fuerza F_1, (F trasladada paralelamente hasta B) y la cupla formada por las fuerzas F y F", cuyo momento es igual al de la fuerza F con respecto al punto B (M = F . BM).

b) R e s u l t a n t e d e u n s i s t e m a d e f u e r z a s c u a l e s q u i e r a.

Sean (figura 101) varias fuerzas, coplanares o no, aplicadas en distintos puntos A, B, C, D ... de un cuerpo rígido.

Todas ellas pueden trasladarse a un punto cualquiera *O* en las fuerzas F'_1, F'_2, F'_3, F .... las que dan una resultante única R, determinada con la regla del paralelogramo.

Pero como cada traslado exige el agregado de una cupla, habrá que componer los respectivos vectores M_1, M_2, M_3, M_4 ..., que darán una cupla resultante de vector Mr.

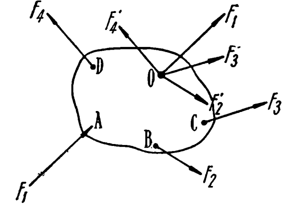


Fig. 101.—*Resultante de un sistema de fuerzas, hallada trasladándolas al punto* O.

c) *Condiciones generales del equilibrio.*

Para que el cuerpo quede en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas aplicado deben cumplirse dos condiciones.

I) Las fuerzas trasladadas a un punto deben dar resultante R nula; es decir, que el polígono de los vectores fuerza debe ser cerrado:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots = 0 \text{ (Suma vectorial).}$$

II) El vector resultante de los que representan las cuplas agregadas debe ser también nulo (polígono de vectores cupla, cerrado):

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots = 0 \text{ (Suma vectorial).}$$

Nota. — Si las fuerzas son coplanares, esta última condición se reduce a que la suma algebraica de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto cualquiera del plano debe ser igual a cero.

§ 33.—**Equilibrio de cuerpos suspendidos y apoyados.**

1.—*Equilibrio.*

Estudiaremos las condiciones de equilibrio de cuerpos sometidos a la acción de su propio peso y de las reacciones que pueden provenir de un punto o un eje de suspensión (cuerpos suspendidos) o de un plano de apoyo (cuerpos apoyados).

Según la posición del centro de gravedad con respecto al punto, eje o plano, pueden presentarse tres tipos de equilibrio.

a) *Estable,* realizado cuando al desviar el cuerpo de su posición de equilibrio vuelve a ella, por efecto de las fuerzas aplicadas.

b) *Inestable,* cuando al desviar el cuerpo de su posición de equilibrio no vuelve, sino que se aleja de ella.

c) *Indiferente,* cuando en cualquier posición que se le coloque se mantiene en equilibrio.

2.—*Cuerpos suspendidos.*

Condición de equilibrio. — Para que un cuerpo suspendido esté en equilibrio es necesario que la vertical que pasa por el centro de gravedad G, contenga al punto o corte al eje de suspensión. En este caso la reacción R aplicada en O y el peso P forman un sistema de dos fuerzas iguales y contrarias y, por tanto, se equilibran (figura 102).

Es fácil comprobar que si el centro de gravedad G está debajo del punto o eje de suspensión O, el equilibrio es estable.

Si el centro de gravedad está más alto que el punto de suspensión, el equilibrio es, en cambio, inestable.

Las figuras 103 y 104 muestran que se originan al desplazar el cuerpo, en cada caso, cuplas formadas por el peso *P* y la reacción *R paralela,* igual y de sentido contrario, las que tienden siempre a llevar el centro de gravedad G a la posición más baja posible.

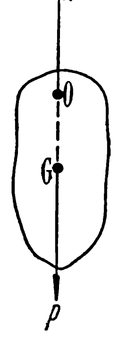


Fig. 102.— *Cuerpo suspendido en equilibrio.*

Cuando el cuerpo está suspendido por su centro de gravedad, el equilibrio es *indiferente,* quedando en equilibrio en cualquier posición que se lo coloque (fig. 105).

3.— *Cuerpos apoyados.*

Condición de equilibrio. — Un cuerpo apoyado sobre un plano está en equilibrio cuan-

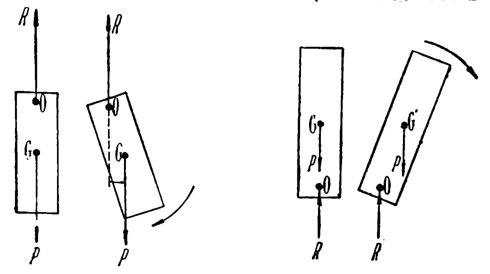


Fig. 103.—*Equilibrio estable.* Fig. 104.—*Equilibrio inestable.*

do la vertical del centro de gravedad cae dentro de la base de sustentación.

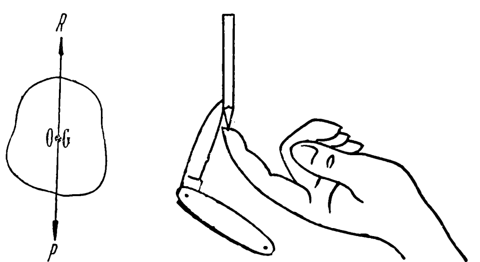


Fig. 105.—*Equilibrio indiferente.*

Fig. 106.—*Equilibrio estable en un caso en que el centro de gravedad está fuera del cuerpo.*

Llámase *base de sustentación* a la superficie de apoyo o al polígono que circunscribe a los puntos de apoyo

En la figura 108 la base de sustentación de la mesa es el polígono ABCD; la del cono apoyado sobre ella es todo el círculo de base.

En ambos casos hay equilibrio porque el peso P del cono cae dentro de su base de sustentación y el peso total P_1 del cono y la mesa cae dentro del polígono ABCD.

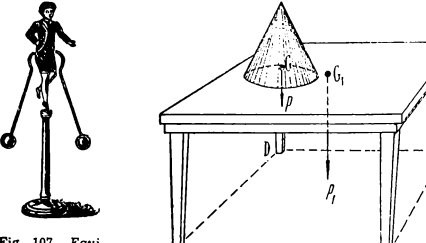
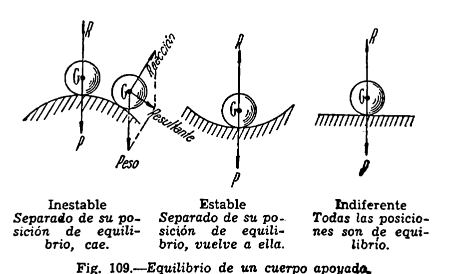


Fig. 107.—*Equilibrio estable. El centro de gravedad está fuera del cuerpo.*

Fig. 108.—*Equilibrio estable de un sistema de cuerpos apoyados.*

Además, siendo los planos de apoyo horizontales, sus reacciones son verticales, constituyendo con el peso, en cada caso, un sistema de fuerzas iguales y contrarias.



Inestable
Separado de su posición de equilibrio, cae.

Estable
Separado de su posición de equilibrio, vuelve a ella.

Indiferente
Todas las posiciones son de equilibrio.

Fig. 109.—*Equilibrio de un cuerpo apoyado.*

Los criterios de estabilidad son los ya enunciados.

En la figura 109 tenemos tres casos de equilibrio con una

esfera apoyada sobre superficies adecuadas. En estos casos el apoyo se reduce a un punto.

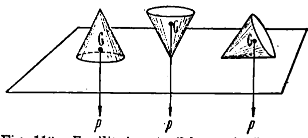


Fig. 110.—*Equilibrio estable* *Equilibrio inestable* *Equilibrio indiferente*

La figura 110 muestra un cono apoyando sobre un plano horizontal, realizando los tres casos de equilibrio.

Cuando la base de sustentación no es un punto, se llama *momento de estabilidad, al producto del peso del cuerpo por su distancia al punto más próximo del perímetro de dicha base.*

Fig. 111.—*Momento de estabilidad* = P × OM.

En la figura 111 el producto del peso P por la distancia *OM* mide el momento de estabilidad.

A la posición de equilibrio inestable corresponde momento nulo (el peso pasa por un punto del perímetro de sustentación).

Un caso interesante de equilibrio se tiene apoyando un prisma en un plano inclinado, en el cual se ha colocado un pequeño taco de madera para evitar que se deslice bajo la acción de la componente del peso paralela al plano (fig. 112).

Dicho taco produce una reacción que se compone con la reacción normal del plano, dando una resultante igual y de sentido contrario al peso.

Aumentando la inclinación del plano, llega un momento en que la vertical del centro de gravedad pasa por el punto M; entonces está en la posición límite de estabilidad.

Fig. 112.—*Límite de estabilidad de un cuerpo apoyado.*

Un pequeño aumento de inclinación produce el vuelco del prisma.

En los cuerpos inhomogéneos, formados por partes de

distinto peso específico, el centro de gravedad no coincide con el centro de figura, dando lugar a hechos paradógicos.

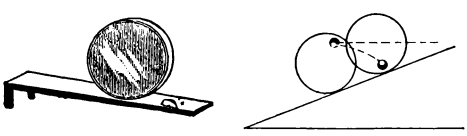


Fig. 113.—*Cilindro lastrado que asciende solo por el plano inclinado.*

El disco de la figura 113, aparentemente homogéneo, pero convenientemente lastrado de modo que el centro de gravedad está próximo al borde, sube por el plano inclinado AB si se lo coloca en posición adecuada. En realidad, el centro de gravedad desciende.

§ 34. — Determinación experimental del centro de gravedad o baricentro.

Hemos visto en el § 33 que un cuerpo suspendido de un punto *O* queda en equilibrio cuando la vertical que pasa por el centro de gravedad G contiene al punto de suspensión.

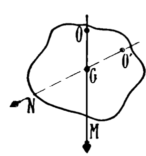


Fig. 114.—*Esquema de la determinación experimental de la posición del centro de gravedad*

Puede, entonces, determinarse la posición del baricentro G suspendiendo al cuerpo sucesivamente por dos puntos y marcando ambas verticales en las posiciones de equilibrio. Su intersección da la posición del centro de gravedad (figs. 114 y 115).

Las posiciones de las verticales que pasan por los puntos O y O' se marcarán sobre el cuerpo con ayuda de una plomada. Así quedarán fijadas las rectas OM y O N, cuya intersección es G.

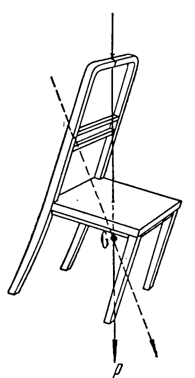


Fig. 115. — *Determinación experimental de la posición del centro de gravedad.*

CAPÍTULO IV

CINEMÁTICA

§ 35. — **Cuerpo rígido.** — Todos los cuerpos se deforman bajo la acción de las fuerzas que sobre ellos actúan, dando lugar, en su interior, al nacimiento de reacciones elásticas.

Así, una columna de acero se acorta por efecto de las cargas que sostiene, originando en su interior reacciones elásticas, que, en conjunto, producen la reacción total, igual y contraria a la resultante de las cargas sostenidas.

Un riel se deforma al pasar la rueda de una locomotora, y la rueda, a su vez, sufre deformaciones en la parte que apoya sobre el riel.

Los cuerpos reales, por más resistentes que parezcan, sufren deformaciones por efectos de las fuerzas que se les aplican. Las distancias entre sus diversos puntos cambian por esa causa, complicándose por ello el estudio, tanto del equilibrio, como del movimiento.

Consideraremos en lo que sigue, y a fin de simplificar la exposición, que siempre operamos con **cuerpos rígidos**, es decir, con *cuerpos ideales que no sufren* deformaciones elásticas, y que, por lo tanto, conservan su forma y dimensiones iniciales.

§ 36 — **1. - Movimiento.** — Cuando observamos que los puntos de un cuerpo cambian de lugar a medida que transcurre el tiempo decimos que el cuerpo está en movimiento.

Para comprobar que los puntos de un cuerpo cambian de lugar, hay que referir su posición a la de ciertos puntos fijos que se toman como términos de comparación.

El cambio de las distancias de un punto del cuerpo dado a los puntos fijos de referencia implica su movimiento. En vez de tomar puntos aislados es común referir el movimiento a sistemas de rectas o planos. Así, al ver caer un cuerpo verticalmente apreciamos su altura sobre el piso del salón en que estamos. La variación de la distancia de los puntos del cuerpo

al piso y el mantenimiento de sus distancias a las paredes del salón, nos permite decir que *cae verticalmente.*

Si el movimiento no fuera vertical, variarían a la vez la altura de cada punto y sus distancias a las paredes.

En cambio, si el cuerpo se moviera (como en el caso de una bola de billar) sobre una mesa horizontal, su altura permanecería invariable, pero sus distancias a los bordes de la mesa cambiarían, lo mismo que sus distancias a las paredes.

Por la variación de las distancias a dos rectas (bordes de la mesa del ejemplo), o de las distancias a 3 planos que se cortan en un punto, como el piso y dos paredes de un salón, se puede constatar el movimiento de los puntos de un cuerpo.

Las rectas o los planos tomados como base para verificar el movimiento constituyen el *sistema de referencia* empleado.

2.—*Sistema de referencia. — Coordenadas.* — Analicemos el caso del movimiento del centro de una esfera que rueda sobre un plano horizontal.

Tomando como sistema de referencia el formado por dos rectas O x, O y, perpendiculares, podemos determinar las posiciones A_1, A_2, A_3, del centro A de la esfera, en tres instantes dados, mediante las correspondientes abscisas y ordenadas referidas a O x y O y como un par de ejes de coordenadas cartesianas.

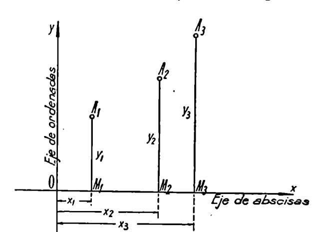


Fig. 116.—*Posición de tres puntos referida a un sistema de ejes coordenados en el plano.*

Estas son: Para A_1 : $y_1 = A_1 M_1$ $x_1 = O M_1$

" A_2 : $y_2 = A_2 M_2$ $x_2 = O M_2$

" A_3 : $y_3 = A_3 M_3$ $x_3 = O M_3$

Con la ayuda de las coordenadas cartesianas puede estudiarse en forma precisa cualquier movimiento, tanto cuando el punto se desliza sobre un plano, horizontal o no, como cuando se mueve en el espacio.

En este último caso hay que usar como sistema de referencia un grupo de 3 planos, que se cortan en un punto, y que determinan, por lo tanto, un ángulo triedro.

Habrá, por tanto, un *triedro de referencia* con tres planos y tres aristas concurrentes en un punto O.

La figura 117 muestra uno de estos triedros de referencia. Las rectas O x, O y, O z son los ejes coordenados, generalmente perpendiculares entre sí, lo mismo que los planos que ellos determinan.

Para fijar la posición de un punto A se determinan sus coordenadas:

x = ON; y = MN; z = AM

La figura muestra que z = AM es la distancia de A al planoxOy, que x = ON es igual a la distancia de A al plano zOy y, finalmente, que y = MN = AL es la distancia de A al 3er. plano de referencia.

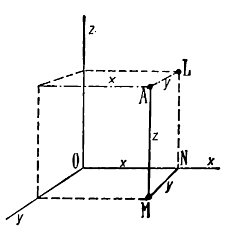


Fig. 117.—*Posición de un punto referida a tres ejes coordenados en el espacio.*

3.—*Trayectoria de un punto.*—Si imaginamos reunidas por una línea todas las posiciones ocupadas por un punto que se mueve, tenemos su trayectoria.

Moviendo rápidamente un trozo de carbón encendido o una lamparilla eléctrica, se verá, por efecto de la persistencia de las imágenes en la retina, una línea o una banda luminosa continua de la que podrá inferirse la forma aproximada de la trayectoria de cada punto.

Trayectoria es la línea determinada por las sucesivas posiciones del punto móvil.

Así es que podemos hablar de trayectorias rectilíneas, circulares, elípticas, parabólicas, etc.

§ 37. **Traslación.**—Un cuerpo realiza un movimiento de traslación cuando se desplaza de modo que una recta AB, que une dos cualesquiera de sus puntos, se mantiene paralela a sí misma en todas sus posiciones, tales como A'B' y A"B" (fig. 118).

Las trayectorias AA'A" y BB'B" de dos puntos cualesquiera A y B son líneas de igual forma, y que, por tanto, se las puede hacer coincidir supeponiéndolas (trayectorias congruentes).

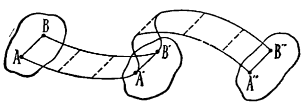


Fig. 118.—***Traslación de un cuerpo rígido.***

El caso más simple lo constituye la traslación rectilínea en la que AA'A" y BB'B" son rectas paralelas, y en la que todos los puntos recorren segmentos de igual longitud.

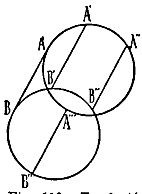


Fig. 119.—*Traslación circular.*

Un vagón de ferrocarril, moviéndose sobre un tramo recto de vía, realiza este último tipo de movimiento.

En la figura 119 se ha representado un *movimiento de traslación circular,* en el que los puntos de una recta AB describen circunferencias iguales.

El segmento AB va ocupando sucesivamente las posiciones A'B', A"B", A'''B''', manteniéndose paralelo a sí mismo.

Todos los puntos del cuerpo a que pertenecen A y B describen circunferencias iguales en este tipo de traslación.

§ 38. — **Rotación.** — Cuando un cuerpo rígido se mueve de tal modo que durante el movimiento permanecen fijos dos de sus puntos, y, por lo tanto, la recta E E' que los une, se dice que está animado de un *movimiento de rotación.*

En este movimiento cada punto del cuerpo describe una circunferencia situada en un plano perpendicular a la recta EE', llamada *eje de rotación.*

Los radios r_1, r_2, r_3 de las circunferencias descriptas por los puntos A, B, C de un cuerpo en rotación, son sus respectivas distancias al eje E E' (fig. 120).

En este movimiento, todos los radios O_1A; O_2B; O_3C giran ángulos iguales.

$$AO_1A' = BO_2B' = CO_3C' = \alpha$$

Un plano que pase por el eje, tal como el EE'A, describe el mismo ángulo α que cualquier radio.

La Tierra realiza alrededor de su eje un movimiento de rotación; los radios de los paralelos, lo mismo que los planos meridianos, giran en cada hora un ángulo de 15° (360° en 24 horas).

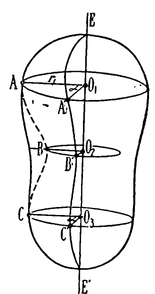


Fig. 120.—*Rotación del cuerpo rígido.*

§ 39. — **Movimientos compuestos.**

1. — En general, los movimientos de los cuerpos no son

ni traslaciones ni rotaciones simples, sino combinaciones de ambos movimientos.

Cuando la rueda de un vagón marcha sobre un tramo recto de riel, se combina la rotación de sus puntos alrededor del respectivo eje y traslación de éste, manteniéndose paralelo a sí mismo.

2. *Movimiento polar, o rotación alrededor de un punto.* — Combinando varias rotaciones alrededor de ejes que pasan por un punto O, se tiene un movimiento que se caracteriza por el hecho de que cada punto del cuerpo se mueve sobre una superficie esférica, cuyo radio es su distancia al centro o polo O.

A este movimiento se lo llama movimiento polar o rotación alrededor de un punto.

§ 40. — **Trayectoria y sistema de referencia.** — La forma de la trayectoria, lo mismo que las demás características del movimiento, dependen esencialmente del sistema de referencia elegido.

Viajando en un vagón de ferrocarril podemos ver uno de sus focos de luz con sus puntos *en reposo* en relación a las paredes del mismo, ya que sus distancias a ellos son invariables. Pero un observador que ve la misma luz desde el andén de una estación y que instintivamente toma como sistema de referencia el piso en que se apoya y planos ligados a él, dirá, con toda razón, que el foco de luz *se mueve,* junto con el vagón.

El movimiento de un cuerpo *que vemos caer verticalmente* sobre la tierra, cambia si lo suponemos referido a un sistema fijo respecto al centro del Sol, ya que la rotación y la traslación de la tierra se combinan con su movimiento.

Más complicada aún sería la trayectoria de los puntos del cuerpo si lo refiriéramos a un sistema de ejes pasando por tres estrellas fijas, pues habría que considerar el movimiento del Sol con relación a ellas.

Aunque a veces se llama *movimiento absoluto* al referido a una terna de ejes ligada al cielo de las estrellas fijas, debemos establecer que en realidad sólo podemos apreciar m o v i m i e n t o s r e l a t i v o s y en ese caso sólo se puede decir: movimiento respecto del cielo de estrellas fijas, llamadas así porque parecen no modificar sus posiciones relativas.

Los movimientos que estudiemos serán siempre m o v i m i e n t o s r e l a t i v o s, referidos, cuando no se indique otra cosa, a un sistema de ejes en reposo con respecto al observador.

§ 41. — **Medida del tiempo.** — 1. *Día sideral.* — La unidad para la medida del tiempo se ha elegido en base al movimiento de la tierra alrededor de su eje.

Este movimiento se nos pone de manifiesto por la rotación aparente de los astros.

La vertical del lugar, en un punto de la superficie de la tierra, determina con la dirección del eje de rotación de la misma un plano llamado **meridiano del lugar.** En su movimiento aparente, todos los astros pasan sucesivamente por dicho meridiano.

El intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos superiores (1) consecutivos de una estrella por el meridiano de un lugar, se llama: **día sideral** o **día estelar** (2).

Como en rigor la tierra es la que gira, el día sideral da la medida del tiempo en que la Tierra cumple una vuelta completa sobre su eje.

Esta unidad de tiempo se acepta como rigurosamente constante.

2. — *Día solar verdadero,* es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del centro del Sol por el meridiano de un lugar.

Su duración es siempre mayor que la del día sideral debido a que la Tierra está, además, animada de un movimiento de traslación.

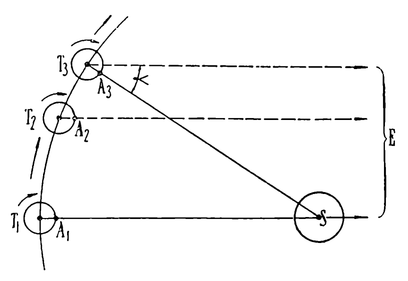


Fig. 121.—*Diferencia entre día y solar y día sideral.*

(1) A la latitud de Buenos Aires, para la mayor parte de las estrellas sólo es visible su paso superior por el meridiano; pero las hay circumpolares, que se ven pasar dos veces en el día, y para las cuales hay que referirse al paso de mayor altura o superior.

(2) En rigor, la duración del día estelar depende de la declinación de la estrella. La designación "Sideral" corresponde más precisamente al día referido al paso del punto vernal o equinoccio de primavera. Prácticamente, sus duraciones se toman como iguales y se confunden sus nombres.

Sea T_1 una posición de la tierra, en el instante en que el observador ubicado en A_1 comprueba el pasaje del Sol S y una cierta estrella E por su meridiano (fig. 121).

Cuando la tierra ha girado 360° sobre su eje, también se ha trasladado a T_2, y el observador en su nueva posición A_2 comprueba el pasaje de la estrella (prácticamente ubicada en el infinito) por su meridiano. Ha transcurrido *un día sideral.*

Sin embargo, el Sol no volverá a pasar por el mismo meridiano hasta que la tierra llegue a T_3, habiendo girado un ángulo a $360^\circ + \alpha$. Ahora ha transcurrido *un día solar verdadero.*

3.— *Día solar medio.* — La duración del día solar verdadero cambia en el transcurso del año.

Se considera por ello un *día solar medio,* cuya duración representa un promedio de la de todos los días solares verdaderos de un año.

En realidad, se determina el día solar medio por el paso por el meridiano de un astro ficticio llamado *Sol medio,* que da la misma duración para todos los días solares.

4.— *Segundo solar medio.* — El día se divide en 24 horas, la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

En caso necesario se utilizan también fracciones decimales de segundo.

Esta división se aplica a los distintos días definidos, dando lugar a intervalos de igual nombre, pero de distinta duración.

Llamaremos, pues, segundo de tiempo solar medio a la 86400 ava parte del día solar medio.

Esta es la unidad utilizada en la física.

5.— *Equivalencias.*

1 día solar medio = 86 400 seg. de tiempo solar medio = 1,002 737 9 días siderales = 1 día sideral + 3 min. 56,555 seg. siderales.

1 día sideral = 86 164,091 seg. de tiempo solar medio = 1 día solar medio — 3 min. 55,909 seg. solares medios.

Abreviaturas: hora = h.
minuto = m o min.
segundo = s. o seg.

Nota. — Se tendrá especial cuidado en no utilizar el acento o doble acento, que deben emplearse exclusivamnte para minutos y segundos de arco.

§ 42.— **Movimiento de un punto.** — Vamos a referirnos al movimiento de un único punto. Sea P_1 su posición inicial e imaginemos que en el transcurso del tiempo recorre una cierta trayectoria representada por la curva O P_1, P_2, P_3, P_4, P.

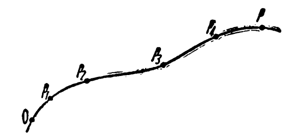


Fig. 122.—*Trayectoria de un punto móvil.*

Llamamos **espacio** a la longitud de camino recorrido a partir de un punto *O* fijado como origen. Midiendo los espacios recorridos y los tiempos empleados en recorrerlos, podremos establecer la ley del movimiento, es decir, ecuaciones que nos permitirán calcular la posición del móvil sobre su trayectoria en un instante cualquiera.

Llamaremos e_1, e_2, e_3, e_4, e, las longitudes (espacios) correspondientes a los caminos OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP, y t_1, t_2, t_3, t_4, t, los instantes en los cuales el móvil pasa por dichos puntos.

§ 43.—**Movimiento uniforme.**

1.—Si observamos que los espacios recorridos en intervalos iguales de tiempo, tomados a partir de cualquier posición, son iguales, decimos que el movimiento es uniforme.

En nuestro ejemplo debe verificarse:

$$\frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2} \ldots = \frac{e_4}{t_4} = \frac{e_4 - e_3}{t_4 - t_3} = \frac{e_3 - e_2}{t_3 - t_2} = \ldots = \text{constante} \qquad [1]$$

para que el movimiento sea uniforme.

Esta constante, que representa el espacio recorrido en la unidad de tiempo con movimiento uniforme, se llama **velocidad** (*velocidad numérica*).

$$v = \frac{e}{t} \qquad [2]$$

Ejemplo:

De un móvil se han anotado los siguientes espacios y tiempos correspondientes:

e	t
8 m	2 seg
12 m	3 seg
32 m	8 seg

Verificar si el movimiento es uniforme y, en ese caso, calcular la velocidad.

Respuesta: es uniforme: $v = 4$ m/seg.

De la definición de velocidad deducimos la fórmula:

$$e = v \cdot t \qquad [3]$$

que permite calcular el espacio recorrido en función de la velocidad y del tiempo.

2.— *Leyes del movimiento uniforme*:

De lo dicho se deduce fácilmente que el movimiento uniforme se caracteriza por las siguientes leyes:

1º) La velocidad es constante.

$$V = \text{Const.} \qquad [4]$$

2º) El espacio recorrido es proporcional al tiempo (fórmula [3]).

3.— *Unidad de velocidad.*

La unidad de velocidad será el cociente de las unidades de longitud y de tiempo; resulta así la velocidad expresada en:

$$\frac{m}{seg}, \frac{cm}{seg}, \frac{Km}{hora}, \text{etc.}$$

que se leen, respectivamente: metro por segundo; centímetro por segundo; kilómetro por hora; etc.

Nota.— En navegación se usa el *nudo* =

$$= \frac{1 \text{ milla marina}}{\text{hora}} = \frac{1852 \text{ m}}{\text{hora}}$$

4.—*Problemas:*

1º) Expresar la velocidad 60 Km/hora en m/seg. y en cm/seg.

$$60 \frac{Km}{hora} = 60 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ seg}} = 16{,}66 \text{ m/seg} = 1666 \frac{cm}{seg}$$

2°) Un móvil recorre con movimiento uniforme 265 kilómetros en 4 horas. Expresar su velocidad en Km/hora; m/seg y cm/seg.

$$v = \frac{e}{t} = \frac{265 \text{ Km}}{4 \text{ h}} = 66{,}25 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 66{,}25 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ seg}} =$$

$$= 18{,}4 \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 1840 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

3°) ¿Qué espacio recorre en 24 horas de navegación un barco cuya velocidad media es de 45 Km/hora?

$$e = v\,t = 45 \times 24 \text{ Km} = 1080 \text{ Km}.$$

4°) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en llegar desde un faro hasta un avión que navega a 27 Km? (velocidad de la luz: 300000 Km/seg).

$$t = \frac{e}{v} = \frac{27 \text{ Km}}{300000 \text{ Km/seg}} = 0{,}00009 \text{ seg}$$

5. — *Representación gráfica.* — Las leyes enunciadas pueden ser representadas en gráficos cartesianos, como se hace corrientemente con las ecuaciones, en matemáticas.

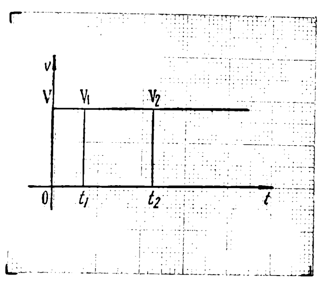


Fig. 123.—*Representación gráfica de la velocidad en el movimiento uniforme.*

Para la primera ley representaremos la velocidad (ordenadas) en función del tiempo (abscisas) (fig. 123).

Resultará una recta paralela al eje del tiempo, pues, a cualquier abscisa corresponde la misma ordenada (valor constante de la velocidad).

En este gráfico, el área comprendida entre el eje *ot*, la recta *v*, y las ordenadas correspondientes a dos tiempos t_1 y t_2 (marcadas en la figura), representa el espacio recorrido por el móvil en dicho intervalo de tiempo.

Es decir:

$$e = e_2 - e_1 = v\ (t_2 - t_1) \qquad [5]$$

Nota. — El área del rectángulo representa el espacio en una escala igual al producto de las escalas empleadas en cada eje.
Ejemplo:
Si en el eje *ot*, un centímetro representa 2 seg y en el *Ov*, un cm representa 10 m/seg, cada *cm*² del gráfico representará *20 metros* = 2 seg × 10 m/seg.

Para representar la segunda ley, elegimos como ejes: *Ot*, que representa el tiempo, y *Oe*, que representa el espacio, (fig. 124).

Resultará una recta que pasa por el origen, en la cual las ordenadas de sus puntos representan los espacios recorridos en los tiempos representados por las abscisas correspondientes.

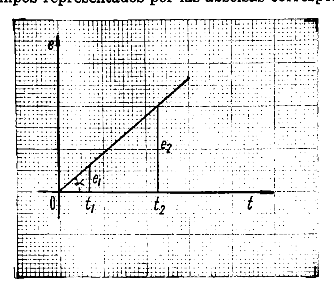


Fig. 124.—Representación gráfica del espacio en el movimiento uniforme.

La inclinación de la recta, medida por el cociente $\dfrac{e}{t} = \text{tg}\alpha$ caracteriza la velocidad.

6. — *Vector velocidad.* — Hemos definido y operado hasta ahora con la *velocidad numérica.* En rigor, la velocidad es una magnitud vectorial cuyo módulo es la velocidad numérica. Su dirección es la de la tangente a la trayectoria y su sentido el del movimiento en el punto de tangencia, (fig. 125).

En el caso particular de que la trayectoria sea una recta, el vector velocidad coincide con la trayectoria y el movimiento se llama rectilíneo uniforme.

Se demuestra que la velocidad es un vector, analizando el movimiento de un punto P y el de sus proyecciones P_x y P_y sobre dos ejes coordenados. Es fácil comprobar que las velocidades v_x y v_y están representadas por vectores, que son las proyecciones del vector v es decir

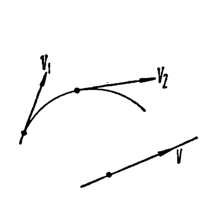


Fig. 125 — *Vector velocidad*

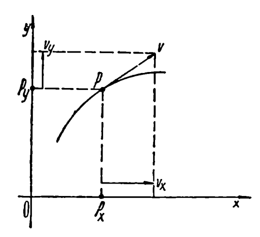


Fig. 125 a.—*Componentes del vector velocidad.*

que las velocidades de las proyecciones son iguales a las proyecciones de la velocidad. Y ésta es la propiedad característica de las magnitudes vectoriales (fig. 125 a).

T A B L A V

VELOCIDADES EN METROS POR SEGUNDO

Hombre caminando	1,70	
Corredor a pie	9,00	
Automóvil (promedio en carreras comunes)	33,33	$\left(120 \dfrac{Km}{h}\right)$
Avión ....entre	30 y 300	
Sonido en el aire a 15°	340	
Bala de fusil (veloc. inicial)	400	
Punto del Ecuador terrestre (rotación)	463	

Tierra alrededor del Sol (traslación)	30.000	(30 Km/seg)
Sistema solar hacia Hércules	20.000	(20 Km/seg)
Luz en el vidrio	200.000.000	(200.000 Km/seg)
Luz en el vacío y ondas electromagnéticas	300.000.000	(300.000 Km/seg)

§ 44. — **Movimiento variado - Velocidad media.** — Cuando los espacios recorridos por el móvil no son proporcionales a los tiempos, se dice que realiza un movimiento variado.

Hay muchos tipos de movimiento variado y sólo estudiaremos algunos en particular.

En el movimiento variado, carece de sentido la noción de velocidad establecida para el movimiento uniforme.

Llamaremos **velocidad media** al cociente del espacio recorrido en un intervalo cualquiera por el tiempo empleado en recorrerlo.

Si e_1 y e_2 son los espacios correspondientes a los tiempos t_1 y t_2, el cociente:

$$Vm = \frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1}$$

define la velocidad media en el intervalo t_1 - t_2.

Se comprende que si el móvil estuviera animado de movimiento uniforme de velocidad v_m habría recorrido el mismo espacio en ese intervalo de tiempo. Por lo tanto, *la velocidad media de un movimiento variado es la velocidad del móvil que con movimiento uniforme recorrería el mismo espacio total en el mismo intervalo de tiempo.*

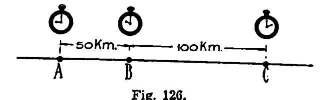


Fig. 126.

Así, por ejemplo: supongamos un vehículo que partiendo de la localidad *A* en el instante t_0 = 9 horas, pasa por la loca-

lidad *B*, situada a 50 Km, en el instante $t_1 = 10$ horas, y por la *C*, situada a 150 Km, en el instante $t_2 = 14$ h., (fig. 126). Su velocidad media entre B y C será:

$$v_m = \frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1} = \frac{(150 - 50)\ \text{Km}}{(14 - 10)\ \text{h}} = 25\ \frac{\text{Km}}{\text{hora}}$$

y entre *A* y *B*:

$$v_m = \frac{e_1 - e_0}{t_1 - t_0} = \frac{50 - 0}{10 - 9} = 50\ \frac{\text{Km}}{\text{hora}}$$

Tomando tiempos de pasaje por puntos intermedios, habríamos determinado otras velocidades medias, que, en general, serán diferentes entre sí.

§ 45. — Velocidad instantánea. — Para definir la velocidad instantánea en un punto P de la trayectoria, consideraremos que a partir de dicho punto el movimiento se hace uniforme;

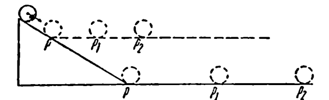


Fig. 127.—*Velocidad instantánea en el movimiento variado.*

a la velocidad de este movimiento uniforme la llamaremos velocidad en el punto P, o velocidad instantánea en P.

Supongamos una esfera que desciende libremente por un plano inclinado; la experiencia indica que su movimiento es variado.

Si después de recorrer un trayecto cualquiera sobre el plano inclinado continúa su movimiento sobre un plano horizontal, comprobaremos que la trayectoria de su centro es una línea recta PP_1P_2, recorrida con movimiento prácticamente uniforme. A la velocidad de este movimiento la llamaremos velocidad instantánea del movimiento de caída en el punto P, (fig. 127).

Aunque esta definición de velocidad instantánea en el movimiento variado es simple, adolece de ciertos defectos que hacen preferible el siguiente camino para definirla.

Sean P_1 y P_2 dos posiciones de un móvil correspondientes a los tiempos t_1 y t_2. De acuerdo con la definición anterior, la velocidad media entre P_1 y P_2 será el cociente del arco P_1-P_2 por el tiempo $t_2 - t_1$.

Si tomamos el punto P_2 **cada vez más próximo** a P_1, disminuirán correspondientemente la longitud del arco y el intervalo de tiempo.

Si acercamos indefinidamente el segundo punto al primero, el cociente:

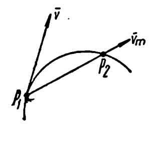
$\frac{arco\ P_1\ P_2}{t_2 - t_1}$ tiende a un valor fijo, que llamaremos velocidad instantánea en el punto P_1, y definiremos así: e s e l v a l o r d e l c o-te $\frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1}$ c u a n d o e s e a c e r c a i n d e f i n i d a m e n t e a e_1 y, p o r l o t a n t o, e l i n t e r v a l o $t_2 - t_1$ s e h a c e m u y p e q u e ñ o. (1)

Supongamos que el móvil pasa por P_1, a las 10 horas y que en el primer segundo subsiguiente recorre 12 metros, es decir, su velocidad media es 12 m/s.

Si realizamos nuevas experiencias tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños, tanto como permitan nuestros medios experimentales, los sucesivos cocientes irán diferiendo cada vez menos, acercándose a un valor límite, p. ej., 10 m/seg que llamaremos velocidad instantánea o velocidad en el punto P_1.

En la práctica, suponiendo que se trate de medir la velocidad de un vehículo, será suficientemente aproximado tomar como velocidad instantánea la velocidad media en un intervalo de ½ ó 0,1 segundos siempre que no se elija precisamente el instante en que se produce una variación muy brusca de velocidad.

Debemos notar que la velocidad media definida como cociente de la longitud del arco de trayectoria por el tiempo empleado en recorrerla, corresponde al concepto de **velocidad numérica media**.



Si, en cambio, se divide la longitud de la cuerda P_1P_2 por el intervalo de tiempo, se obtiene la **velocidad vectorial media**, que se representa por un vector cuya dirección es la de la cuerda, y cuyo sentido va de P_1 a P_2, pero cuyo módulo, en general, no será igual al de la velocidad numérica. Cuando el movimiento es rectilíneo, ambos valores coinciden.

(1) Con rigor debe decirse: es el límite del cociente:

$$\frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

cuando Δt *tiende a cero y se escribe:*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{de}{dt}$$

La velocidad vectorial instantánea tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto considerado, y su módulo es igual a la velocidad numérica.

§ 46. — **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.**

1. — Cuando la velocidad de un móvil aumenta en el transcurso del tiempo, se dice que su movimiento es acelerado; si disminuye, se llama retardado.

El caso más simple de un movimiento rectilíneo variado es aquel en que las variaciones de velocidad son proporcionales a los tiempos, es decir, que en tiempos iguales la velocidad experimenta variaciones iguales. Se lo llama **uniformemente variado.**

Aceleración e s e l a u m e n t o d e v e l o c i d a d e n l a u n i d a d d e t i e m p o.

Si v_1 y v_2 son las velocidades en los instantes t_1 y t_2, la aceleración es:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad [7]$$

Si $v_2 > v_1$ la velocidad crece con el tiempo, el valor de a es positivo y el movimiento se llama *acelerado.*

Si $v_2 < v_1$ la velocidad decrece con el tiempo y el movimiento se llama *retardado.*

Sea, p. ej., un móvil cuyas velocidades son: $v_1 = 3$ m/seg, $v_2 = 9$ m/seg, $v_3 = 18$ m/seg, en los instantes $t_1 = 2$ seg, $t_2 = 4$ seg, $t_3 = 7$ seg; se observa que:

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} = \text{Constante} = 3\ \frac{\text{m/seg}}{\text{seg}}$$

luego el movimiento es uniformemente acelerado y su velocidad aumenta 3 m/seg en cada segundo.

2. — *Unidad de aceleración.* — La unidad de aceleración resulta de dividir la unidad de velocidad por la de tiempo. Así usaremos corrientemente las unidades de aceleración:

$$m/seg^2 \text{ ó } cm/seg^2$$

que se leen: *metro por segundo cuadrado* o *centímetro por segundo cuadrado.* En el ejemplo anterior es: $a = 3\ \dfrac{m}{seg^2}$.

3.— *Velocidad.* — Si la velocidad es nula en el instante $t = 0$, dado su valor v en el instante t, la aceleración es:

$$a = \frac{v}{t}, \text{ luego:}$$

$$v = at \qquad [8]$$

Si para $t = 0$ la velocidad posee ya un valor v_0, la velocidad v en el instante t, que llamamos velocidad final, será:

$$v = v_0 + at \qquad [9]$$

en virtud de la definición de aceleración: $a = \dfrac{v - v_0}{t}$

Ejemplos:

a) Un móvil cuya velocidad inicial es de 2 m/seg se mueve con aceleración $a = 0{,}3$ m/seg². ¿Cuál será su velocidad al cabo de 10 seg?

Respuesta:

$v = 2$ m/seg $+ 0{,}3$ m/seg2 x 10 seg $= 5$ m/seg (1)

b) Un tren que marcha a 10 m/seg se frena y detiene en 20 seg; suponiendo que la aceleración es constante, calcular su valor.

Respuesta:

$$a = \frac{(0 - 10) \text{ m/seg}}{20 \text{ seg}} = -0{,}5 \text{ m/seg2}$$

§ 47. — Representación gráfica de la velocidad.— Tomando ejes coordenados para representar el tiempo y la velocidad, obtendremos como representación gráfica, una recta inclinada con respecto a los ejes. Si la velocidad inicial es nula (para $t = o$; $v = o$), la recta pasará por el origen de coordenadas y

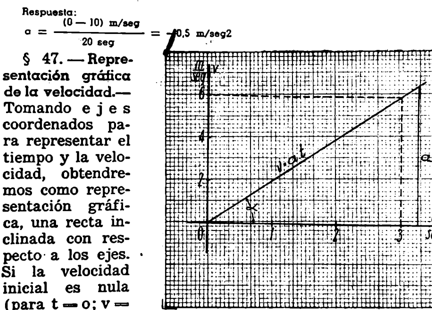


Fig. 130.—*Gráfico de la velocidad en el movimiento uniformemente acelerado sin velocidad inicial.*

(1) En todos los cálculos numéricos debe operarse con los símbolos de las unidades de acuerdo con las reglas del álgebra. En este caso

$$\frac{m}{seg2} \cdot seg = \frac{m}{seg}$$

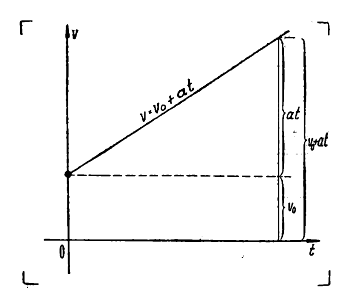


Fig. 131.—*Gráfico de la velocidad en el movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial.*

corresponde a la representación de la ecuación v = a t, análoga a la conocida ecuación $y = ax$; correspondiendo la abscisa x y la ordenada y, respectivamente, al tiempo t y a la velocidad v.

En la figura 130 se ha representado el caso de un movimiento en que a = 2 m/seg².

La aceleración

$$a = \frac{v}{t},$$

está representada por la tangente del ángulo α que la recta forma con el eje de los tiempos.

Si la aceleración es negativa (movimiento retardado), la velocidad será:

$$v = v_0 - at$$

y estará representada por una recta descendente (pendiente negativa) (figura 132).

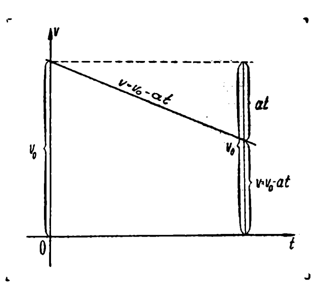


Fig. 132.—*Gráfico de la velocidad en el movimiento uniformemente retardado.*

§ 48.—**Espacio en el movimiento uniformemente acelerado.** — Al estudiar el movimiento uniforme, vimos que en el gráfico de la velocidad el espacio recorrido estaba representa-

do por el área del rectángulo limitado por las ordenadas correspondientes a los instantes extremos t_1 y t_2, el eje Ot y la recta representativa de la ecuación v = constante.

Vamos ahora a demostrar que también en el caso de un movimiento uniformemente variado, el área encerrada entre las ordenadas de los instantes extremos, el eje ot y la recta AH, representan el valor del espacio recorrido.

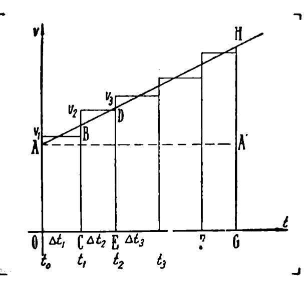


Fig. 133.—*Cálculo del espacio en el movimiento variado.*

Sustituyamos el movimiento, cuya velocidad está representada por la recta *AH,* por un conjunto de movimientos uniformes de velocidades v_1, v_2 . v_3 ... (fig. 133)

Si calculamos la suma de productos:

$$e = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots$$

$$\text{siendo } \Delta t_1 = t_1 - 0; \Delta t_2 = t_2 - t_1 \ldots \text{ etc.;}$$

obtendremos el espacio recorrido por un móvil cuya velocidad hubiera ido variando a saltos; y vemos que este espacio está representado por la suma de las áreas de los pequeños rectángulos Ov_1BC, Cv_2DE..., etc. Si disminuímos indefinidamente la duración de los intervalos Δt, nos iremos acercando cada vez más al valor del espacio recorrido por el móvil que se mueve con movimiento uniformemente acelerado, y gráficamente, a la superficie del trapecio *OAHG,* cuya área representará para los Δt suficientemente pequeños, el valor del espacio que buscamos.

De la figura deducimos que esta área es:

$$S = \frac{OA + HG}{2} . OG \qquad [10]$$

o sea

$$e = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \qquad [11]$$

teniendo en cuenta que $v = v_0 + at$ y reemplazando:

$$e = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} \cdot t$$

luego:



$$e = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} at^2 \qquad [12]$$

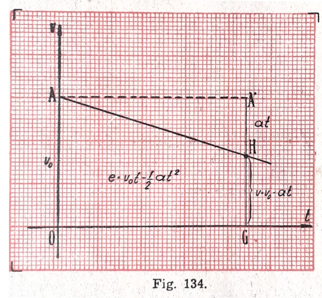


Fig. 134.

Se podría haber calculado el área considerando que es la suma del rectángulo

OAA'G $= v_0t$ y el triángulo AA'H $= \tfrac{1}{2} at^2$

Si la velocidad inicial es nula ($v_0 = o$), el espacio estará representado por el segundo miembro:

$$e = \tfrac{1}{2} at^2 \qquad [13]$$

Cuando el movimiento es uniformemente retardado, el mismo razonamiento nos lleva a las fórmulas (ver figura 134):

$$v = v_0 - at \qquad [14]$$

$$e = v_0t - \tfrac{1}{2} at^2 \qquad [15]$$

En rigor, puede utilizarse exclusivamente las fórmulas con signo positivo, teniendo presente que en cada caso se aplicará la aceleración con su signo (positivo si el movimiento es acelerado y negativo si es retardado).

§ 49. — **Leyes del movimiento uniformemente acelerado.** — Las leyes del movimiento uniformemente acelerado toman una expresión simple si nos referimos al caso de movimientos con velocidad inicial nula. En tal caso, de las fórmulas:

$$v = at \qquad [8]$$

$$e = \frac{1}{2} at^2 \qquad [13]$$

deducimos:

1º) *La velocidad es proporcional al tiempo.*

2º) *El espacio es proporcional al cuadrado del tiempo empleado en recorrerlo.*

Refiriéndonos al caso general en que la velocidad inicial es diferente de cero, estas leyes deben enunciarse así:

1.º) Las variacions de velocidad son proporcionales a los tiempos ($v - v_0 = at$).

2.º) El espacio recorrido está representado por una ecuación de 2.º grado con respecto al tiempo. ($\frac{1}{2} at^2 + v_0t = e$).

Aplicaciones.

a) Un móvil parte del reposo y se mueve con aceleración 2 m/seg². Calcular la velocidad adquirida y el espacio recorrido en 5 seg.

$$V = at = 2 \times 5 \text{ m/seg}^2 \text{. seg.} = 10 \text{ m/seg}$$

$$e = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2}\, 2 \times (5)^2 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \cdot \text{seg}^2 = 25 \text{ m}$$

b) Calcular la aceleración del movimiento de un cuerpo que recorre 32 metros en 4 seg con movimiento uniformemente acelerado, siendo su velocidad inicial $v_0 = 10$ m/seg.

$$e = v_0t + \frac{1}{2} at^2$$

$$a = \frac{2\,(e - v_0t)}{t^2} = \frac{2\,.\,(32^{\text{m}} - 10 \times 4 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \text{ seg})}{16 \text{ seg}^2}$$

$$a = \frac{2\,(32 - 40)}{16} \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = - \frac{2 \times 8}{16} \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = - 1 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

luego, el movimiento es retardado de aceleración $\frac{1 \text{ m}}{\text{seg}^2} = \frac{100 \text{ cm}}{\text{seg}^2}$

§ 50 —Representación gráfica del espacio.

Si se eligen como coordenadas el tiempo y el espacio, el gráfico correspondiente al movimiento será una parábola. (fig. 135 a, b y c).

Ejercicio: comprobar que los gráficos siguientes corresponden a los movimientos indicados en cada uno.

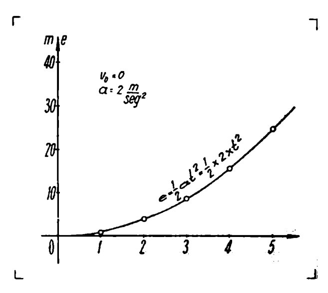


Fig. 135 a.—*Gráfico del espacio en un movimiento uniformemente acelerado sin velocidad inicial.*

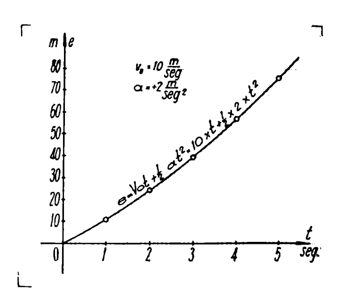


Fig. 135 b.—*Gráfico del espacio en un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial.*

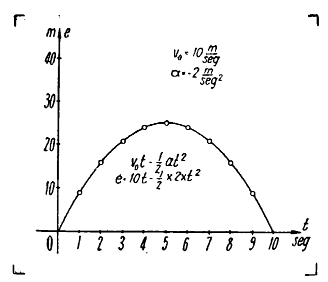


Fig. 135 C.—*Gráfico del espacio en un movimiento uniformemente retardado.*

§ 51.— Movimiento rectilíneo variado en general.

Un movimiento rectilíneo en el que la velocidad no aumenta, o disminuye cantidades iguales en tiempos iguales, es un movimiento variado. La definición de aceleración dada anteriormente no vale para este caso. Pueden determinarse *aceleraciones medias* en diversos intervalos, dividiendo los aumentos de velocidad por los tiempos en que se producen.

Tomemos, por ejemplo, un movimiento variado tal que el gráfico de la velocidad en función del tiempo sea el de la figura 136.

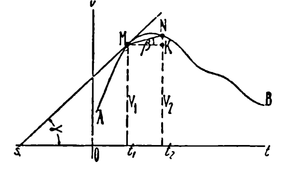


Fig. 135 c.—*Gráfico del espacio en un movimiento uniformemente retardado.*

Sean v_1 y v_2 las velocidades correspondientes a los instantes t_1 y t_2.

La aceleración media entre t_1 y t_2 es:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad [16]$$

De la observación del gráfico, resulta que, llamando β al ángulo que la cuerda MN forma con la paralela al eje Ot y teniendo en cuenta que $v_2 - v_1 = NK$ y $t_2 - t_1 = MK$, la aceleración media es:

$$a_m = \frac{NK}{MK} = \operatorname{tg}\beta \qquad [17]$$

Si el intervalo $(t_2 - t_1)$ disminuye, los puntos M y N se acercan y la cuerda MN tiende a convertirse en la tangente geométrica a la curva AMNB en el punto M.

Llegado este caso, la aceleración media se convierte en la *aceleración instantánea* correspondiente al tiempo t_1. Su valor estará dado por la tangente trigonométrica del ángulo α que la recta MS forma con la dirección del eje Ot.

Su expresión matemática es análoga a la dada para la velocidad (§ 45):

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \ (^1) \qquad [18]$$

y en el gráfico: $a = \operatorname{tg} \alpha$

En cuanto al espacio recorrido entre dos instante como t_1 y t_2, está representado por el área $t_1 MNt_2$ (Se demuestra razonando como § 48).

§ 51 a.—**Movimiento curvilíneo uniformemente variado.** La definición de aceleración dada para el movimiento rectilíneo uniformemente variado vale sólo para la *aceleración tangencial o aceleración numérica del* movimiento curvilíneo.

Las fórmulas de la velocidad y del espacio son también válidas refiriéndose a la velocidad numérica y a la longitud de los caminos curvilíneos recorridos.

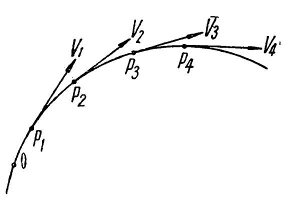


Fig. 137.—*Trayectoria curvilínea.*

En rigor, el estudio de este movimiento, lo mismo que el de un movimiento variado cualquiera sobre una curva $OP_1P_2P_3P_4$, debe hacerse teniendo en cuenta el concepto vectorial de las velocidades y las aceleraciones y las reglas que rigen su composición y descomposición.

§ 52.—**Caída de los cuerpos en el vacío.**—Como ejemplo de movimiento uniformemente acelerado, podemos citar el de la caída libre en el vacío. Para pequeñas alturas de caída y cuerpos de gran densidad podemos admitir que la caída en el aire es también un movimiento uniformemente acelerado.

La aceleración de caída libre la llamaremos *aceleración de la gravedad,* y la designaremos con la letra g. El valor de esta aceleración, determinado por procedimientos que más adelante indicaremos (ver § 86), es diferente en los distintos lugares de la tierra, aumentando desde el ecuador hacia los polos, pero es el mismo para todos los cuerpos, como puede compro-

(1) Δt y Δv representan un par cualquiera de valores correspondientes de diferencias de velocidad y de intervalos de tiempo.

barse con el tubo de Newton, en el cual se provoca la caída en el vacío de cuerpos de muy diverso peso (fig. 138). Se ha convenido en tomar como valor normal el que correspondería a la latitud 45° y al nivel del mar, esto es:



Fig. 138.—*Haciendo vacío en el tubo de Newton, se comprueba que varios cuerpos pequeños, de peso muy diferente, caen con igual aceleración.*

$$g_n = 980{,}665 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \cong 981 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

Los valores límites llegan a:

$$g_0 = 978{,}046 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \quad \text{(Ecuador)}$$

$$g_{90} = 983{,}232 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \quad \text{(Polos)}$$

En Buenos Aires, puede tomarse con suficiente aproximación:

$$g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

En unidades inglesas se encontrará citado el valor:

$$g = 32{,}174 \frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}$$

La comprobación de que el movimiento de caída es uniformemente acelerado, podemos realizarla tomando espacios y tiempos de caída. Comprobaremos que:

$$\frac{e}{t^2} = \text{constante} \qquad [19]$$

lo cual concuerda con las fórmulas dadas para este tipo de movimiento.

Como el valor de la aceleración de la gravedad es relativamente elevado, las velocidades adquiridas en la caída libre son rápidamente crecientes y ello dificulta las mediciones de los tiempos.

Para estudiar movimientos acelerados más lentos, se realiza la experiencia provocando la caída por un plano inclinado.



Fig. 139.—*Comprobación de las leyes de caída en el plano inclinado.*

A medida que disminuye la inclinación del plano, irá disminuyendo la aceleración del movimiento. Fácil será comprobar entonces que el movimiento es uniformemente acelerado, pues se obtendrán espacios recorridos proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

La figura 139 muestra una forma práctica de disponer la experiencia. Un carrito desciende por un plano inclinado; los puntos marcados 1, 4, 9, 16 son los de partida para que llegue al pie del plano en los tiempos 1, 2, 3, 4, marcados por las oscilaciones de un *metrónomo.*

Para comprobar la ley de las velocidades se hace de modo que después de caer por el plano inclinado, el cuerpo se desplace sobre un plano horizontal en el cual el movimiento puede considerarse uniforme en la primera parte de su recorrido.

Dejándolo entonces caer desde alturas tales que correspondan a tiempos 1, 2, 3, etc., se medirán en el plano horizontal velocidades: v, 2v, 3v . . ., etc.

Aplicaciones:

a) ¿Qué caminos recorre un cuerpo en 1, 2, 3, y 4 seg. de caída libre, suponiendo $g = 9.8$ m/seg²? Representar gráficamente el espacio en función del tiempo.

Aplicando: $e = \frac{1}{2} gt^2$ resulta. $e_1 = 4{,}9$ m

$e_2 = 19{,}6$ m

$e_3 = 44{,}1$ m

$e_4 = 78{,}4$ m

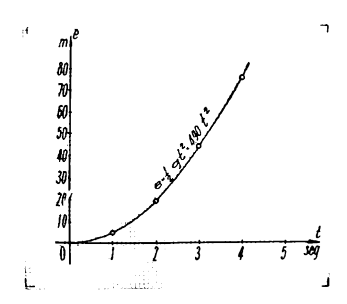


Fig. 140.—*Espacio recorrido en la caída libre de el vacío.*

b) ¿Qué tiempo tarda en caer un cuerpo desde 50 metros de altura? De la fórmula del espacio resulta:

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \sqrt{\frac{100\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m|seg}^2}} = 3{,}2\ \text{seg.}$$

c) Si se lanza hacia arriba un cuerpo con velocidad 40 m/seg, ¿con qué clase de movimiento sube? Calcular la altura máxima h_m que alcanza y representar el espacio y la velocidad.

Respuesta:

I) El movimiento es uniformemente retardado:

$$v = v_0 - gt = (40 - 9{,}8\ .\ t)\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$e = v_0t - \tfrac{1}{2}\ gt^2 = (40\ .\ t - \tfrac{1}{2}\ .\ 9{,}8\ .\ t^2)\ \text{m}$$

II) Cálculo de la altura máxima:

Cuando el cuerpo alcanza la altura máxima, su velocidad es nula y habrá tardado un tiempo t_m tal que:

$$v = v - gt_m = 0$$

de donde se deduce:

$$t_m = \frac{v_0}{g}$$

reemplazando en la fórmula del espacio:

$$h_m = v_0 t_m - \frac{1}{2} g \; t_m^2$$

$$h_m = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

reemplazando valores:

$$h_m = \frac{40^2}{2 \times 9{,}8} = \frac{800}{9{,}8} \text{ m} = 81{,}6 \text{ m}$$

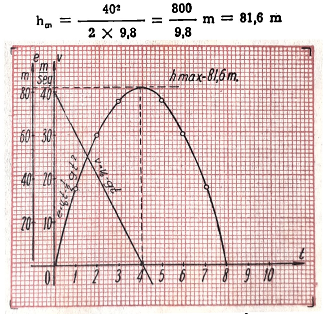


Fig. 141.—*Espacio y velocidad en el movimiento de un cuerpo lanzado hacia arriba.*

d) ¿Cuánto tarda en llegar a la altura $h = 20$ m un cuerpo lanzado hacia arriba con velocidad inicial $v_0 = 30$ m/seg?

Partiendo de la fórmula del espacio

$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$: ordenándola como ecuación de 2º grado en t se tiene:

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + e = 0$$



GALILEO (1564 - 1642)

Fundador del método experimental, es el verdadero iniciador de la física moderna.

Realizó estudios de medicina en su juventud, pero su espíritu fue pronto atraído por la matemática, la física y la astronomía, en cuyo campo encontró la posibilidad de conocimientos más precisos.

Descubrió las leyes de la caída de los cuerpos y del movimiento del péndulo; estableció el principio de inercia *y el de* superposición de movimientos, *bases de la mecánica.*

Construyó el primer termómetro e inventó el anteojo astronómico.

Defendió ardientemente la teoría de Copérnico sobre el movimiento de los planetas, sosteniendo la existencia de la rotación de la tierra. Por ello fue sometido a juicio por el tribunal de la Inquisición, debiendo adjurar públicamente de sus ideas.

Se lo considera el iniciador del método científico *tal como se lo practica actualmente.*

Aplicando la fórmula para la solución de la ecuación general de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

resulta:

$$t = \frac{+v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \times ½\, g \times e}}{2 \times ½\, g}$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, e}}{g}$$

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 2 \times 9{,}8 \times 20}}{9{,}8} = \frac{30 \pm 22.5}{9{,}8}$$

Resultan dos valores $t_1 = 0{,}766$ seg y $t_2 = 5{,}36$ seg que corresponden a los dos pasos del móvil por dicha altura; el primero durante el ascenso y el segundo durante su descenso después de haber pasado por la altura máxima.

Si la altura dada hubiera sido mayor que la altura máxima, la cantidad subradical habría sido negativa, es decir, hubiéramos obtenido raíces imaginarias.

§ 53. — **Composición de movimientos.** — Cuando un cuerpo se desplaza sobre otro cuerpo que también se mueve, los movimientos de ambos se combinan.

Así, un vehículo que se traslada sobre un camino, c o m p o n e su movimiento con el de la tierra que lo arrastra, de manera que su velocidad y su trayectoria con respecto a la tierra no son las mismas que resultarían refiriéndolas a un sistema ligado al centro del Sol.

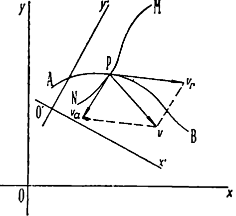
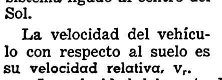


Fig. 142. — *Composición de velocidades.*


La velocidad del vehículo con respecto al suelo es su **velocidad relativa**, v_r.

La velocidad del punto de la tierra en que está el vehículo en el instante considerado, es la **velocidad de arrastre**, v_a.

Componiendo ambas velocidades se obtendrá la **velocidad total v.**

Si O'(x'y') es el sistema de ejes coordenados al cual referimos el movimiento de un punto P, y este sistema se mueve con respecto al O(xy) que suponemos fijo, la velocidad relativa v_r es la del punto P con respecto al sistema móvil (fig. 142).

La velocidad de arrastre es la que el punto tendría respecto del sistema fijo, si lo suponemos fijo con respecto al sistema móvil; es decir, es la velocidad de ese punto del sistema móvil.

La velocidad resultante, será la suma geométrica de ambas y, en general, tendrá que ser determinada en cada instante.

En el estudio de la trayectoria aplicaremos el *principio de superposición de movimientos* (de Galileo), que podemos enunciar así:

Cuando el movimiento de un punto es resultante de otros dos simultáneos, la posición que ocupa al cabo de un tiempo t es la misma que ocuparía si ambos movimientos se hubieran cumplido sucesiva e independientemente uno de otro y cada uno de ellos durante el mismo tiempo t.

Así, por ejemplo: si P_0, M_1, M_2, M_3, M_4 y P_0, N_1, N_2, N_3, N_4, son las sucesivas posiciones que un punto móvil P ocuparía según cada uno de dos movimientos simultáneos, su trayecto-

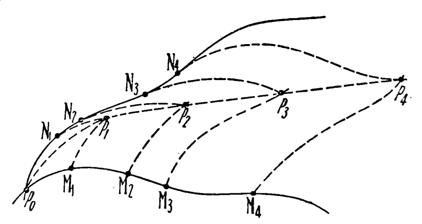


Fig. 143.—*Composición de movimientos.*

ria real será $P_0P_1P_2P_3P_4$, determinada según el principio de superposición enunciado.

Ejemplos:

a) Un pasajero recorre el tren con movimiento uniforme de velocidad $v_r = 1,2$ m/seg en la dirección de su movimiento y el tren recorre un tramo rectilíneo con velocidad 12 m/seg. Calcular la velocidad total del pasajero. Respuesta:

$$v = v_a + v_r = 13,2 \text{ m/seg.}$$

Si se mueve en sentido contrario:

$$v = v_a - v_r = 10,8 \text{ m/seg.}$$

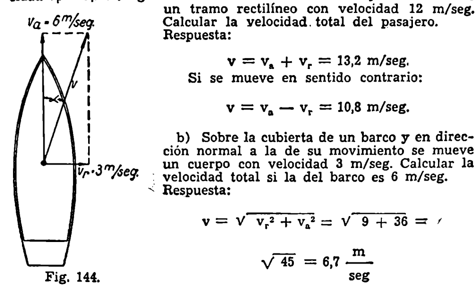


Fig. 144.

b) Sobre la cubierta de un barco y en dirección normal a la de su movimiento se mueve un cuerpo con velocidad 3 m/seg. Calcular la velocidad total si la del barco es 6 m/seg. Respuesta:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_a^2} = \sqrt{9 + 36} =$$

$$\sqrt{45} = 6,7 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Si se desea la dirección de la velocidad resultante, puede calcularse el ángulo α, que en este caso es tal que: $\text{tg}\,\alpha = \frac{v_r}{v_a} = \frac{3}{6} = 0,5$; de las tablas obtenemos: $\alpha = 26°30'$.

c) Un bote cruza un canal de 30 m de ancho, moviéndose perpendicularmente a la dirección de la corriente. Llega a la orilla opuesta habiéndose desplazado 14 m en la dirección de la corriente. Si la velocidad de ésta es 2 m/seg, calcular las velocidades relativa y total del bote.

Los espacios y las velocidades forman triángulos semejantes:

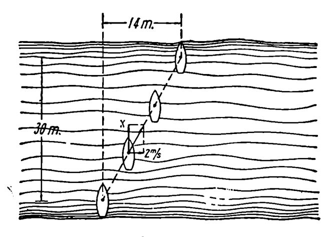


Fig. 145.

$$\frac{30}{14} = \frac{v_r}{v_a}$$

$$\frac{30}{14} = \frac{v_r}{2}$$

$$v_r = \frac{60}{14} = 4,28 \text{ m/seg}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_a^2} = \sqrt{4{,}28^2 + 2^2} = 4{,}7 \text{ m/seg}$$

d) Una embarcación se dirige desde la localidad *A* hasta otra *B* situada a 16 Km aguas arriba y regresa hasta *A*. Calcular el tiempo total sabiendo que la velocidad de la embarcación es de 4 m/seg y la de la corriente 0,8 m/seg.

$$\text{de } A \text{ a } B: \quad v_1 = 4 - 0.8 = 3{,}2 \text{ m/seg} \therefore t_1 = \frac{16000}{3{,}2} = 5.000 \text{ seg}$$

$$\text{de } B \text{ a } A: \quad v_2 = 4 + 0.8 = 4{,}8 \text{ m/seg} \therefore t_2 = \frac{16000}{4{,}8} = 3.333 \text{ seg}$$

$$t = t_1 + t_2 = 8.333 \text{ seg} = 2 \text{ horas, } 18 \text{ min, } 53 \text{ seg.}$$

NOTA. — Si $V_a = 0$ (agua en reposo) el tiempo total sería $t = 8000$ seg ; si $V_a = V_r$ el tiempo total sería $t = \infty$ ya que la embarcación no podrá avanzar en la corriente..

§ 54.—**Composición de aceleraciones.** — Hemos referido en el párrafo anterior cómo se componen las velocidades instantánea relativa y de arrastre y sólo nos hemos planteado, para simplificar, el caso de un movimiento sobre el plano (referido a dos ejes cartesianos).

En los casos más generales de movimiento, será necesario referirse a *ternas de ejes* y tendremos también una terna móvil O' (x'y'z') y otra que suponemos fija O (x, y, z).

Se demuestra, apoyándose en el principio de superposición enunciado más arriba, que los problemas más complejos de composición de movimientos pueden resolverse ateniéndose a las siguientes reglas de carácter general:

1°) La posición de un punto del móvil en un instante dado queda determinada en la forma que indica el principio de superposición de movimientos.

2°) La velocidad instantánea total o absoluta es la suma geométrica de las velocidades relativa y de arrastre. (fig. 146).

3°) Si el movimiento de arrastre es *de traslación*, la aceleración instantánea es la suma geométrica de las aceleraciones relativa y de arrastre (fig. 147).

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_a$$

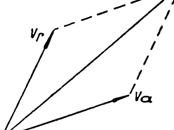


Fig. 146. — *Paralelogramo de las velocidades.*

4°) *Si el movimiento de arrastre es de rotación o rototraslatorio*, hay que agregar un vector a_0 llamado aceleración complementaria o de Coriolis, cuyo valor es proporcional a la velocidad angular de la rotación instantánea de

arrastre y cuya dirección es perpendicular al eje de dicha rotación y al vector velocidad relativa.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_c$$

Todo esto habría que tenerlo en cuenta para estudiar en forma completa el caso aparentemente simple del ejemplo del vehículo que se traslada sobre la Tierra, del § 53, ya que la terna fija el suelo se traslada y gira con respecto a la terna fija al centro del Sol.

En general, las reglas de la composición de movimientos permiten también su descomposición; repitiendo las descomposiciones puede llegarse a considerar cualquier movimiento como resultante de muchos otros, los que pueden elegirse arbitrariamente, es decir, que el problema de la descomposición tiene infinitas soluciones.

Fig. 147. — *Paralelogramo de las aceleraciones si el movimiento de arrastre es una traslación.*

CAPÍTULO V

DINAMICA

§ 55.— **Objeto.** — La dinámica se propone el estudio del movimiento en base a las causas que lo producen.

En el capítulo de cinemática sólo interesaban los distintos tipos de movimiento, las trayectorias o las leyes espacio-temporales independientemente de las causas o los modos como podían obtenerse esos movimientos. En la estática nos ocupamos de las fuerzas y su equilibrio.

Ahora nos proponemos un problema más completo: dado un cuerpo y las fuerzas que sobre él actúan, dar las ecuaciones del movimiento y, recíprocamente, dado el movimiento deducir las fuerzas que lo han producido.

La solución de este problema tiene origen en los trabajos de Galileo (1563 - 1672); Huygens (1629 - 1695), y Newton (1643 - 1727), y como resumen quedan los principios que conocemos como *principios de la dinámica,* cuyos enunciados y alcances fueron debidamente aclarados por Newton.

§ 56.— **Principios de la dinámica.** — Newton estableció tres principios:

1º) *Principio de inercia.*

2º) *Principio de masa.*

3c) *Principio de acción y reacción.*

1º) *Principio de inercia.* — Todo cuerpo persevera en el estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme en que se encuentra, a menos que alguna fuerza actúe sobre él y lo obligue a cambiar ese estado.

Este principio no es intuitivo. Por lo menos, desde Aristóteles hasta Galileo se creyó que *todo* movimiento era debido a la acción de fuerzas.

Sin embargo, un análisis más profundo de los hechos nos permite comprender que las experiencias que parecen contradecirlo, no cumplen estrictamente la condición que impone el final del enunciado. Es decir: todo cuerpo se conserva en reposo o continúa moviéndose con movimiento rectilíneo y uniforme *si no actúa ninguna fuerza sobre él,* y es precisamente ésta la condición de difícil realización experimental.

Imaginemos una esfera lanzada a rodar sobre un plano horizontal. Aparentemente no actúan fuerzas sobre ella o por lo menos las que actúan parecen estar en equilibrio: el peso por una parte y la reacción del plano, igual y de sentido contrario, por la otra. Sin embargo, otras experiencias nos dicen que, en este caso, actúa además una fuerza que se opone al movimiento, debida al "rozamiento" de la esfera contra el plano. Este no es nulo aunque la esfera *ruede* sin deslizarse ya que si no tuviera "rozamiento" (adherencia entre la esfera y el plano), tampoco aquélla podría *rodar.* Y sucede lo que ya imaginamos: el movimiento es rectilíneo pero no uniforme, y después de recorrer un cierto espacio la esfera se detiene. Repitamos la experiencia puliendo cada vez mejor las superficies en contacto (las de la esfera y el plano) y observaremos que, a igualdad de velocidad inicial, va aumentando el alcance, es decir, nos acercamos más al movimiento uniforme.

Deducimos así que mejorando indefinidamente las condiciones experimentales, cuando pueda considerarse nulo el rozamiento, la esfera continuará moviéndose, y ya no rodando sino trasladándose con velocidad constante y en línea recta.

Recíprocamente diremos: cuando un cuerpo se traslada con movimiento rectilíneo y uniforme, todas las fuerzas que actúan sobre él están en equilibrio. Es decir, si un vehículo, por la acción de su motor, se mueve en línea recta y con velocidad constante, podemos afirmar que, en esas condiciones, la fuerza motriz equilibra exactamente a las causas que se oponen al movimiento (resistencia del aire, rozamientos, etc.).

Las condiciones ideales de ausencia total de fuerza no son experimentalmente realizables.

2°) *Principio de masa.* — Todo cuerpo sometido a la acción de una fuerza, recibe una aceleración proporcional a su intensidad y de la misma dirección y sentido.

En este caso, de acuerdo con el principio de inercia, el cuerpo no podrá estar en reposo ni animado de movimiento rectilíneo uniforme. De modo que todo movimiento que no es al mismo tiempo rectilíneo y uniforme, será debido a la acción de una fuerza y estará caracterizado por una aceleración.

Newton, basándose en hechos experimentales, estableció la relación entre la fuerza que actúa y la aceleración que el

cuerpo recibe. Si la fuerza es constante en dirección, sentido e intensidad, la aceleración también lo será y para cada cuerpo encontraremos un valor constante de la relación entre las fuerzas y las aceleraciones que producen, al cual se designa con el nombre de **masa** [1].

Es decir:

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = \ldots = \text{masa} = m \qquad [1]$$

Un caso particular de fuerza es el peso, bajo cuya acción se produce el movimiento de caída en que la aceleración constante la hemos llamado g (aceleración de la gravedad). A esta fuerza podemos también aplicarle el principio de masa, y tendremos un medio de calcular las masas de los cuerpos.

$$m = \frac{P}{g} \qquad [2]$$

La fórmula:

$$F = m \cdot a \qquad [3]$$

es la expresión matemática más simple del principio de masa.

3º) *Principio de acción y reacción.* — Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce sobre el primero una fuerza igual y contraria que se llama reacción.

Este principio es idéntico al que estudiamos en la estática (§ 13 a) y sólo cabe agregar que se aplica también a las acciones entre cuerpos en movimiento. Así, por ejemplo, si un cuerpo apoyado sobre un plano horizontal ejerce una fuerza igual a su peso, el plano ejerce sobre él una fuerza igual y contraria (reacción) (fig. 148).

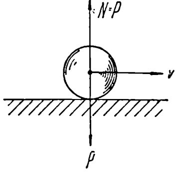


Fig. 148.—*El peso se equilibra con la reacción del plano horizontal.*

Si el cuerpo se mueve sobre el plano, cualquiera sea su velocidad,

(1) Cuando se trata de velocidades grandes (el término comparación es la velocidad de la luz = 300.000 km/seg. se admite, de acuerdo con la teoría de la relatividad, que la masa no es constante pues experimenta una variación que depende de la velocidad.

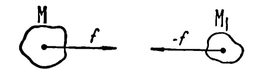


Fig. 149.—*Las fuerzas de atracción entre dos cuerpos cualesquiera son iguales y contrarias.*

subsistirán ambas fuerzas (acción y reacción) iguales y de sentido contrario.

Sabemos que todo cuerpo está sometido a la acción de su peso (atracción de la tierra); este principio nos dice que la misma fuerza es ejercida por el cuerpo sobre la tierra, pero en sentido contrario, aun cuando no estén en contacto, tal es el caso de las atracciones entre los astros (fig. 149).

§ 56 a.— Se suele enunciar como otro principio de la dinámica el *principio de independencia de acción de las fuerzas* que está estrechamente vinculado al principio de masa y al cual Newton dió el carácter de Corolario de los anteriores, y se enuncia así:

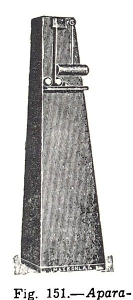


Fig. 151.—*Aparato para la comprobación del principio de independencia de acción de las fuerzas. Al golpear con el martillo, la esfera de la derecha que cae verticalmente y la de la izquierda lanzada horizontalmente llegan al suelo al mismo tiempo.*

Si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, cada una de ellas produce la misma aceleración que si actuara sola, independientemente de las demás.

Esto significa que, dado el problema de determinar la aceleración producida por un sistema de fuerzas puede resolverse hallando la que produce su resultante o bien calculando las aceleraciones que produciría cada una de las fuerzas y sumándolas luego geométricamente.

Si la fuerza F_1 produce la aceleración a_1 y la fuerza F_2 la aceleración a_2, la resultante $R = F_1 + F_2$ producirá una aceleración $a = a_1 + a_2$ (suma geométrica) (figura 150).

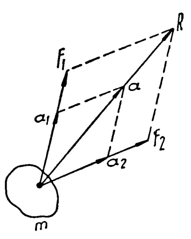


Fig. 150.—*El paralelogramo de las aceleraciones es semejante al de las fuerzas.*

§ 57.—**Cálculo de masas.**— De acuerdo con

la fórmula [2], podemos calcular la masa de un cuerpo conociendo su peso, ya que se tiene

$$m = \frac{P}{g}$$

Corrientemente el peso se determina en balanza de platillos, es decir, comparándolo con el de las pesas, cuyo valor marcado es el *peso normal,* o sea *el peso en el lugar de la Tierra* en que la aceleración de la gravedad tiene su valor normal:

$$g_n = 9{,}80665 \frac{m}{seg^2}$$

Esto significa que se ha determinado el *peso normal* del cuerpo.

Bastará, pues, dividir ese valor por g_n para obtener la masa

$$m = \frac{P_n}{g_n} \qquad [4]$$

Si el peso se determina con un dinamómetro, se obtiene el *peso en el lugar* y la masa se calcula dividiendo por el valor local de g.

$$m = \frac{P}{g} \qquad [5]$$

Comparando [4] y [5], obtenemos la relación entre los pesos normal y local y las respectivas aceleraciones.

$$\frac{P}{P_n} = \frac{g}{g_n} \qquad [6]$$

§ 58.— **Unidades de masa.** — 1. *Unidades técnicas.* — Expresado el peso en Kgr y la aceleración de la gravedad en $\frac{m}{seg^2}$

se obtiene la masa en:

$$\frac{\text{Kgr}}{\text{m/seg}^2} = \frac{\text{Kgr. seg}^2}{\text{m}} \qquad [7]$$

Para que el cociente $\frac{P}{g}$ sea igual a 1, los números que miden P y g deben ser iguales. Por lo tanto, la masa será igual a 1 $\frac{\text{Kgr. seg}^2}{\text{m}}$, cuando el peso normal del cuerpo es $P_n = 9{,}80665$ Kgr.: Esta es la unidad técnica de masa.

También se utiliza el kilogramo masa (kg) que es la masa del kilogramo patrón.

2.— *Unidad C. G. S. o absoluta.* — Es más corriente en la física el uso del *gramo masa* que se define como la milésima parte de la masa del kilogramo patrón.

Usaremos en adelante la siguiente notación para distinguir el gramo fuerza del gramo masa, ya que, a pesar de tener el mismo nombre, corresponden a magnitudes físicas fundamentalmente diferentes:

gramo - fuerza — gr

gramo - masa — g

Aplicaciones numéricas. — (Si en las aplicaciones no se desea expresar g_n con seis cifras exactas, puede tomarse el valor 9,81 m/seg². En Bs. As. se tomará $g = 9{,}80$ m/seg²).

1º) Expresar en unidades C. G. S. y técnicas la masa de un cuerpo cuyo peso es $p_n = 1$ Kgr.

Respuesta:

a) en c. g. s. 1000 g pues pesa 1000 gr.

b) en técnicas: $\frac{P}{g} = \frac{1 \text{ Kgr seg}^2}{9{,}81 \text{ m}} = 0{,}102 \ldots \frac{\text{Kgr seg}^2}{\text{m}}$

2º) Sobre un vehículo que pesa 3 toneladas actúa una fuerza horizontal de 300 Kgr. Calcular la aceleración que recibe suponiendo nulos los frotamientos.

Respuesta:

$$a = \frac{F}{m} \; ; \; m = \frac{P}{g}$$

$$\therefore a = \frac{F}{P} g = \frac{300 \text{ Kgr}}{3.000 \text{ Kgr}} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = 0{,}981 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

3°) ¿Cuánto pesa un cuerpo que bajo la acción de una fuerza de 20 gr. se mueve con aceleración 2 cm/seg²)?

Respuesta:

$$P = mg, \therefore P = \frac{F}{a} g = \frac{0{,}020 \text{ Kgr}}{0{,}02 \text{ m/seg}^2} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = 9{,}81 \text{ Kgr}$$

§ 59. — **Comprobación del principio de masa. Máquina de Atwood.** — La máquina de Atwood se utiliza para verificar algunas aplicaciones del principio de masa y estudiar la caída de los cuerpos.

Consta fundamentalmente de una polea liviana montada sobre cojinetes de muy pequeño rozamiento, por cuya garganta pasa un hilo de peso despreciable, con pesas en sus extremos. Una regla graduada, vertical, y de unos 2 metros, sirve para medir los desplazamientos de las pesas. En la parte superior una plataforma móvil con disparador mecánico, permite determinar con precisión el instante inicial del movimiento.

Un cronómetro, metrónomo, o péndulo agregado a la máquina servirá para medir los tiempos de caída.

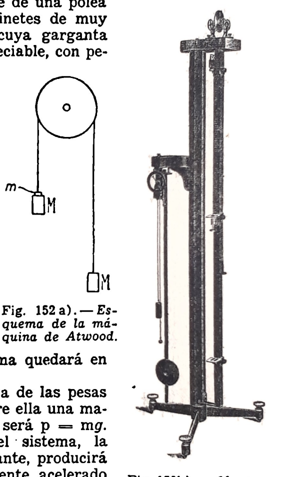


Fig. 152 a). — *Esquema de la máquina de Atwood.*

Fig. 152b). — *Máquina de Atwood.*

Teoría. — Colocadas dos masas iguales *M* en los extremos del hilo, el sistema quedará en equilibrio.

Supongamos colocada una de las pesas en la parte superior, y sobre ella una masa adicional m, cuyo peso será $p = mg$. Si dejamos en libertad el sistema, la fuerza *p*, continua y constante, producirá un movimiento uniformemente acelerado del sistema formado por las dos masas *M* y la masa m (fig. 152).

En todo este razonamiento suponemos nula la masa de la polea y del hilo y nulos los frotamientos.

Aplicado el principio de masa (fórm. [3], § 56), la aceleración del movimiento será:

$$a = \frac{F}{masa} = \frac{p}{2\,M + m} = \frac{m}{2\,M + m}\,g \qquad [8]$$

Se comprende que siendo m mucho más pequeña que 2 M + m, la aceleración de caída será también mucho menor que *g*, y ello facilitará la medición de los espacios y los tiempos (en la práctica las masas M son de 50 a 100 g y m de 1 a 10 g).

Comprobaciones a realizar. — a) *Leyes del movimiento de caída.*

1º) Se miden los espacios recorridos en 1, 2, 3 unidades de tiempo (que serán o no iguales a 1 seg., según el instrumento para medir el tiempo de que se disponga), y se verifica que los espacios son proporcionales a 1, 4, 9, es decir, proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

Conocido el tiempo empleado en recorrer un determinado espacio *e*, se calcula la aceleración:

$$a = \frac{2e}{t^2}$$

deducida de la fórmula $e = \frac{1}{2}\,at^2$.

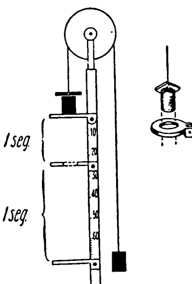


Fig. 153.—*Método para medir la velocidad de caída al cabo de un segundo en la máquina de Atwood.*

2º) Utilizando una masa adicional con aletas y un anillo que la detiene se comprueba la ley de las velocidades del siguiente modo: se coloca el anillo a una altura tal que retire la sobrecarga después de 1 seg de caída, y se mide el espacio que recorre en el primer segundo subsiguiente (figura 153).

Este valor será aproximadamente la velocidad del movimiento uniforme con que continúa el sistema en virtud del principio de

inercia, después de suprimida la fuerza. Luego, se repite la operación, colocando el anillo de modo que retire la sobrecarga después de dos segundos de recorrido. La nueva velocidad resultará doble de la anterior, es decir, proporcional al tiempo de caída, o sea: $v = at$.

b) *Verificación del principio de masa*:

Se toman 3 sobrecargas iguales $p = mg$ y se colocan primero dos de un lado y una en el otro (fig. 154). La fuerza que produce el movimiento es entonces $(2\,p + Mg) - (p + Mg) = p$. La aceleración es:

$$a_1 = \frac{m}{2\,M + 3\,m}\,g$$

Midiendo el tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada (o el espacio recorrido en la unidad de tiempo), se determina a_1.

Se repite la operación colocando las tres sobrecargas del mismo lado. Entonces la aceleración debe ser:

$$a_2 = \frac{3\,m}{2\,M + 3\,m}\,g$$

es decir: triple de la aceleración a_1.

Una nueva medida de tiempo y camino recorrido permitirá obtener el valor a_2.

Dividiendo este segundo valor por el primero debe resultar:

$$\frac{a_2}{a_1} = 3$$

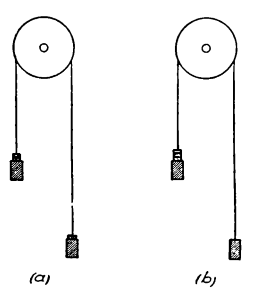


Fig. 154.—*Método para comprobar el principio de masa.*

Si la experiencia se realiza midiendo en cada caso el espacio recorrido en el primer segundo, el cociente de los espacios dará también la relación de las aceleraciones:

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\frac{1}{2}\,a_2\,t^2}{\frac{1}{2}\,a_1\,t^2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Este cociente resultará también igual *a 3.*

La causa principal de error en la máquina de Atwood estriba en que no es rigurosamente exacta la suposición de que los frotamientos son nulos ni es nula la masa de la polea. Por eso no se pretenderá que los valores de las aceleraciones obtenidos experimentalmente concuerden exactamente con los valores calculados con la fórmula [8]. Será siempre menor que p la fuerza actuante y, por lo tanto, la aceleración medida será menor que la calculada.

§ 60 — **Unidades - Sistemas c. g. s., técnico y m. k. s.**

Un sistema de unidades se caracteriza por tres unidades fundamentales arbitrariamente elegidas, de las que se deducen las que corresponden a todas las demás magnitudes físicas, mediante las fórmulas que las vinculan.

1°) *Sistema técnico o métrico.*

Las Unidades fundamentales de este sistema son:

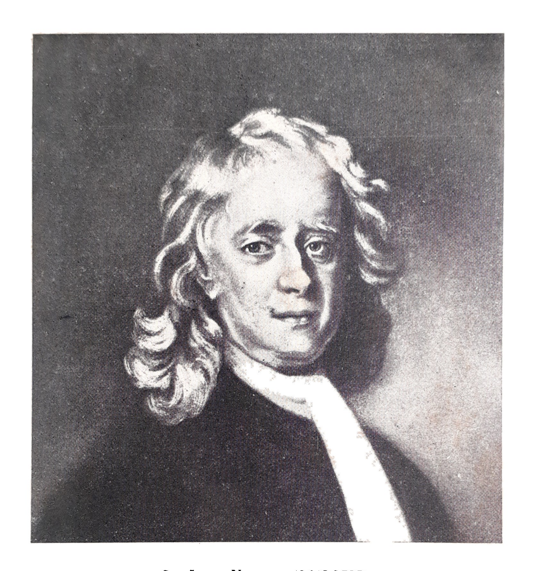
de longitud	- metro (m)
de fuerza	- Kilogramo (Kgr)
de tiempo	- Segundo (seg)

Estas tres unidades están definidas en § § 7, 14, 41.

Unidades derivadas

Superficie	m^2
Volumen	m^3
Velocidad	$\frac{m}{seg}$
Aceleración	$\frac{m}{seg^2}$
Masa	$\frac{Kgr \quad seg^2}{m}$

Las unidades derivadas también han sido ya definidas, y en los capítulos sucesivos definiremos cada unidad al tratar la magnitud correspondiente.



SIR ISAAC NEWTON (1642-1727)

Matemático y físico genial, llamado por sus contemporáneos "príncipe de los filósofos".

Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge; a él se deben la fórmula que da las potencias de un binomio (binomio de Newton) y la invención del cálculo infinitesimal, instrumento matemático de inapreciable valor para la física.

Descubrió la ley de gravitación *que rige las atracciones entre los astros y enunció las leyes fundamentales del movimiento en que se apoyan la mecánica y toda la física.*

Hizo también importantes descubrimientos en el campo de la óptica.

En la obra "Principia" *(Principios de filosofía natural) publicada en 1687 reúne sus principales descubrimientos.*

2º) *Sistema c. g. s. o absoluto.* — Con este sistema se toman como fundamentales las unidades de *longitud, masa* y *tiempo*:

centímetro	(cm)
gramo masa	(g)
segundo	(seg)

que ya han sido definidas (§§ 8, 58).

Serán derivadas las unidades de:

superficie	cm^2
volumen	cm^3
velocidad	$\frac{cm}{seg}$
aceleración	$\frac{cm}{seg^2}$

La unidad de fuerza la deducimos aplicando el principio de masa:

$$f = m \cdot a$$

$$\text{si } m = 1 \text{ y } a = 1, \text{ resulta } f = 1$$

o sea: que la unidad de fuerza será igual al producto de la unidad de masa por la unidad de aceleración.

Físicamente significa que la unidad de fuerza es la que le comunica a la unidad de masa la aceleración unidad. En el sistema c. g. s. se la llama *dina*.

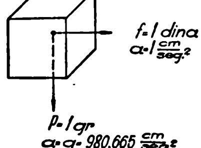


Fig. 155.—Dina y gramo fuerza

Dina es la fuerza que aplicada al gramo masa le comunica una aceleración de 1 cm/seg².

$$[f] = [m] \, . \, [a] \text{ (1)}$$

$$\text{dina} = 1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \qquad [9]$$

3°) *Sistema m. k. s.* (*Giorgi*).

Las unidades fundamentales son las de longitud, masa y tiempo:

metro (m)
kilogramo masa (kg)
segundo (seg)

La unidad de fuerza se denomina *newton* y sus dimensiones son:

$$\text{newton} = \text{kg.m/seg}^2 \ ;$$

es la fuerza que le comunica al kilogramo masa una aceleración de 1 m/seg^2.

§ 61.— **Relaciones entre unidades.**— En la práctica se utiliza como unidad de fuerza el *gr* que, como sabemos, es la milésima parte del Kgr. El gramo fuerza comunica al gramo masa la aceleración de la gravedad (caída libre), mientras que la dina, por definición, sólo le comunica una aceleración de 1 cm/seg^2, es decir, 980,665 veces menor. Por lo tanto, será:

$$1 \text{ gr} = 980{,}665 \text{ dinas} \qquad [10]$$

Razonando de otro modo, decimos:

$$f = m \, . \, a$$

$$1 \text{ gr} = 1 \text{ g} \times 980{,}665 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} = 980{,}665 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

como:

$$1 \text{ dina} = 1 \frac{\text{g.cm}}{\text{seg}^2}$$

resulta:

$$1 \text{ gr} = 980{,}665 \text{ dinas.}$$

Por lo tanto:

$$1 \text{ newton} = 1\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = 1.000 \text{ g} \frac{100 \text{ cm}}{\text{seg}^2} = 100.000 \text{ dina} = 10 \text{ dina}$$

y como:

$$1 \text{ dina} = \frac{1}{980{,}665} \text{ gr} = 0{,}00102 \text{ gr}$$

tendremos:

$$1 \text{ newton} = 102 \text{ gr} = 0{,}102 \text{ kgr}$$

Es sencillo deducir que la unidad técnica de masa es igual a 9806,65 unidades c. g. s.

$$1 \frac{\text{Kgr.seg}^2}{\text{m}} = 9806{,}65 \text{ g}$$

(1) El corchete significa *unidad* [f] significa unidad de fuerza; [m] unidad de masa; [a] unidad de aceleración.

Estos sistemas a que nos hemos referido son los más usuales; sin embargo, debe notarse que pueden idearse otros sistemas eligiendo arbitrariamente tres unidades cualesquiera. Por ejemplo, el sistema de Gauss tiene por unidades fundamentales:

mm	(milímetro)
mg	(miligramo masa)
seg	(segundo)

En Francia se utiliza el sistema M. T. S., cuyas unidades fundamentales son: metro, tonelada-masa, segundo.

En los países anglosajones se utilizan como unidades fundamentales: pie (longitud), libra (peso), seg (tiempo) (1).

§ 62.—**Impulso y cantidad de movimiento.**—De acuerdo con el principio de masa: si una fuerza f actúa sobre un cuerpo de masa m, le comunica una aceleración $a = \frac{f}{m}$.

Si la acción de la fuerza tiene una duración t, el producto $f \cdot t$ se denomina **impulso de la fuerza.**

Reemplazando:

$$f = ma,$$

resulta:

$$f \cdot t = m \cdot a \cdot t = mv \qquad [11]$$

Al producto mv se lo denomina **cantidad de movimiento.**

En muchas aplicaciones resulta posible calcular el impulso de la fuerza, pues el tiempo de aplicación es suficientemente grande como para ser medido y la fuerza es conocida. En otras, el tiempo de acción de la fuerza es muy pequeño o la fuerza no se conoce y entonces se calcula la cantidad de movimiento que, de acuerdo con [11] es igual al impulso de la fuerza.

Ejemplo: Los gases de la pólvora actúan sobre un proyectil de 35 g y le comunican una velocidad de 500 m/s. Si el tiempo de acción de la fuerza es de 1/100 seg., calcular la intensidad de la fuerza supuesta constante.

Será: $F \cdot t = mv$

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{35 \times 50000 \text{ gcm}}{0{,}01 \text{ seg}^2} = 175000000 \text{ dina} = \sim 175 \text{ Kgr}$$

(1) Libra = 18 onzas = 0,4594 kgr.

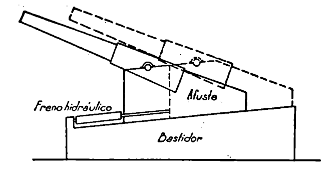


Fig. 156.—*Al producirse un disparo el cañón retrocede, pues recibe un impulso igual y de sentido contrario al del proyectil.*

Hay que notar que, por el principio de acción y reacción, esa fuerza ha actuado durante el mismo tiempo, pero en sentido contrario, sobre el arma que produjo el disparo; el sistema formado por el arma y el tirador han recibido el mismo impulso o cantidad de movimiento. Su mayor masa hace que la velocidad de retroceso sea menor que la del proyectil.

Estos conceptos se aplican especialmente a la solución del problema de choque de cuerpos.

§ 63.—**Choque de cuerpos.**

1.—Veamos primero el caso en que los cuerpos que chocan son *perfectmente inelásticos*, es decir, que se deforman bajo la acción de fuerzas exteriores y no recobran su forma primitiva.

Imaginemos dos esferas de masas m_1 y m_2 cuyas velocidades v_1 y v_2 tienen la misma recta de acción, y supongamos que la primera alcanza y choca a la segunda.

Durante el choque, actuarán fuerzas iguales y contrarias sobre las dos esferas, de modo que ambas reciben impulsos o cantidades de movimiento iguales pero de signo contrario. Mientras aumenta la cantidad de movimiento de m_2 disminuye la de m_1. Después del choque continuarán moviéndose ambos con igual velocidad v, constituyendo un único cuerpo de masa $m_1 + m_2$.

Fig. 157.—*Choque de cuerpos inelásticos.*

Si llamamos Δv_1 y Δv_2, las variaciones respectivas de velocidad, la masa m_1 conservará al final una cantidad de movimiento:

$$m_1 v_1 - m_1 \Delta v_1 \qquad [12]$$

y la masa m_2 del mismo modo:

$$m_2 v_2 + m_2 \Delta v_2 \qquad [13]$$

La cantidad de movimiento total al final será:

$$(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 - m_1 \Delta v_1 + m_2 v_2 + m_2 \Delta v_2 \qquad [14]$$

Pero por lo dicho es:

$$m_1 \Delta v_1 = m_2 \Delta v_2 \qquad [15]$$

luego:

$$(m_1 + m_2)\ v = m_1\ v_1 + m_2\ v_2 \qquad [16]$$

de donde deducimos la velocidad final:

$$v = \frac{m_1\ v_1 + m_2\ v_2}{m_1 + m_2} \qquad [17]$$

En el caso de que las velocidades iniciales sean de distinto sentido, la cantidad de movimiento final será la diferencia de las iniciales, de modo que resulta:

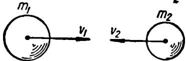


Fig. 158.

$$v = \frac{m_1\ v_1 - m_2\ v_2}{m_1 + m_2} \qquad [18]$$

En este caso, si $| m_1\ v_1 | > | m_2\ v_2 |$ resulta $v > 0$, lo que significa que ambos cuerpos se moverán en el sentido de v_1 antes del choque.

Si en cambio es $| m_1\ v_1 | < | m_2\ v_2 |$ resulta $v < 0$, o sea que la velocidad final tiene el sentido de v_2 antes del choque.

El choque de cuerpos perfectamente inelásticos se realiza muy aproximadamente con arcilla blanda.

2.—Si los cuerpos son *perfectamente elásticos* quiere decir, que una vez deformados vuelven a tomar la forma primitiva poniendo en acción fuerzas iguales y de signo contrario a las que los deformaron.

El mecanismo del choque es el siguiente: al chocar, los cuerpos se deforman y la cantidad de movimiento que recibe uno de ellos la pierde el otro, como si fueran cuerpos inelásticos; luego ambos cuerpos recuperan su forma primitiva y vuelven a ganar o perder la misma cantidad de movimiento que ganaron o perdieron respectivamente en el primer proceso.

Consideremos las dos esferas de la fig. 159, perfectamente elásticas. Sean v_1 y v_2 los *valores absolutos* de las velocidades, y tomemos como sentido positivo el de v_1. Por lo dicho, si antes del choque las velocidades son $+ v_1$ y $- v_2$, al final del primer período del choque, ambas esferas se moverán con la velocidad común.

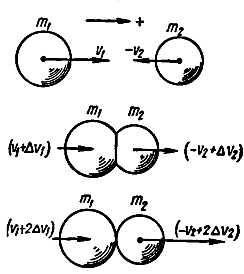


Fig. 159.—*Fases del choque central de dos esferas elásticas.*

$$v = \frac{m_1\ v_1 - m_2\ v_2}{m_1 + m_2} \qquad [18]$$

La velocidad $+ v_1$ se ha transformado en v y la $- v_2$ también se ha transformado en v, de modo que las *variaciones* de velocidad (valores finales menos valores iniciales) son:

$$\Delta v_1 = v - v_1$$
$$\Delta v_2 = v - (-v_2) = v + v_2 \qquad [19]$$

(Estas variaciones podrán ser positivas o negativas).

Cuando los cuerpos recuperan su forma primitiva, en el segundo período del choque elástico, vuelven a experimentar iguales *variaciones* de velocidad; de modo que las velocidades finales serán:

$$v_{1f} = v_1 + 2 \Delta v_1$$
$$v_{2f} = - v_2 + 2 \Delta v_2 \qquad [20]$$

Aplicando [19] en [20], tenemos:

$$v_{1f} = v_1 + 2 (v - v_1) = 2 v - v_1$$
$$v_{2f} = - v_2 + 2 (v + v_2) = 2 v + v_2 \qquad [21]$$

y reemplazando v por su valor [18]:

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v_1 - 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$[22]$$
$$v_{2f} = \frac{(m_1 - m_2) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

En estas fórmulas se reemplazan los *valores absolutos* de v_1 y v_2 y se obtienen las velocidades finales con signo + o —, según que concuerden o no con el sentido de v_1.

Repitiendo el razonamiento para el caso en que las velocidades iniciales tienen el mismo sentido, se obtienen las mismas fórmulas, pero con el signo cambiado para v_2:

$$v_{1f} = \frac{2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$
$$[23]$$
$$v_{2f} = \frac{2 m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2}{m_1 + m_2}$$

Como aplicación simple de choque de cuerpos elásticos, imaginemos una esfera perfectamente elástica que choca normalmente contra un muro también perfectamente elástico.

Sean:

m_1 y v_1 la masa y velocidad de la esfera antes del choque Además, podemos suponer para el muro:

$$m_2 = \infty \; ; \; v_2 = 0$$

Aplicando la 1ª de las fórmulas [22]:

$$v_{1f} = \frac{v_1 \; (m_1 - m_2) - 2m_2 \; v_2}{m_1 + m_2}$$: dividendo numerador y denominador por m_2

$$v_{1f} = \frac{v_1 \left(\frac{m_1}{m_2} - 1 \right) - v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

y teniendo en cuenta los datos del problema:

$$\frac{m_1}{m_2} = 0 \qquad v_2 = 0$$

resulta:

Fig. 160.—*Choque normal entre una esfera y un muro perfectamente elásticos.*

$v_{1f} = - v_1$ lo cual significa que la velocidad final es igual pero de signo contrario a la velocidad inicial; es decir, la esfera *rebota.*

Si el choque es oblicuo, solo se invierte la componente de la velocidad que es perpendicular al plano de choque y la esfera vuelve con igual velocidad pero formando con la pared un ángulo igual y de sentido contrario al que forma la velocidad de llegada.

§ 64.—**Densidad y peso específico.**—Se llama *densidad* o *masa específica* de un cuerpo homogéneo al cociente de la masa por su volumen. o sea: la masa de la unidad de volumen.

$$\delta = \frac{m}{V} \qquad [24]$$

En el sistema c. g. s. la unidad de densidad será:

$$|\delta| = \frac{g}{cm^3} \qquad [25]$$

En el sistema técnico:

$$|\delta| = \frac{\text{Kgr seg}^2}{\text{m}^4} \qquad [26]$$

y en el m. k. s.:

$$|\delta| = \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \qquad [27]$$

Se ha definido en § 15 el peso específico $\rho = \frac{P}{V}$; sabiendo que $P = mg$, obtenemos:

$$\rho = \frac{mg}{V} = \frac{m}{V} \cdot g = \delta \cdot g \qquad [28]$$

Las unidades peso específico serán:

sistema técnico $\quad [\rho] = \frac{\text{Kgr}}{\text{m}^3}$

sistema c. g. s. $\quad [\rho] = \frac{\text{dina}}{\text{cm}^3}$

sistema m. k. s. $\quad [\rho] = \frac{\text{newton}}{\text{m}^3}$

La densidad relativa o cociente de la densidad de una sustancia por la de otra tomada como término de comparación es un número abstracto igual al peso específico relativo:

$$D = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{\delta g}{\delta_0 g} = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad [29]$$

En química es corriente tomar para los líquidos la densidad o peso específico con respecto al agua y para los gases con respecto al aire.

Un detalle que cabe destacar para evitar errores conceptuales es que: *la densidad en el sistema c. g. s. está representada por el mismo número que el peso específico expresado en gr/cm*^{3}*;* unidad esta última, que no corresponde a ninguno de los sistemas de unidades que hemos estudiado. El mismo número representa el peso específico relativo y la densidad relativa si se toma como término de comparación el agua destilada a 4° C.

Ejemplo:
Hierro

Densidad: sist. c. g. s. ...... $\delta = 7{,}5 \dfrac{g}{cm^3}$

" " técnico ...... $\delta = \dfrac{7500}{9{,}81} = 765 \dfrac{Kgr\ s^2}{m^4}$

" " m. k. s. ...... $\rho = 7500 \dfrac{Kg}{m^3}$

Peso específico: sist. c. g. s. . $\rho = 7{,}5 \times 980{,}665 = 7350 \dfrac{dina}{cm^3}$

" " técnico ..... $\rho = 7500 \dfrac{Kgr}{m^3}$

" " m. k. s. .... $\rho = 73500 \dfrac{newton}{m^3}$

" " práctico ... $\rho = 7{,}5 \dfrac{gr}{cm^3}$

Peso esp. relat. = densidad relat. = D = 7,5.

§ 65.—**Tiro en el vacío.**—Vamos a estudiar el problema de determinar la trayectoria de un proyectil lanzado en el vacío con la velocidad inicial v_0 que forma un ángulo α con la horizontal. Nos referimos a dos ejes coordenados x e y en el plano vertical que contiene a v_0.

Vamos a aplicar el principio de superposición de movimientos y el de independencia de acción de las fuerzas, es decir: el móvil cumple simultáneamente un movimiento rectilíneo uniforme según la recta de acción del vector v_0 y un movimiento de caída uniformemente acelerado. En los sucesivos segundos las posiciones serán las que representa la figura (161). Es más cómodo descomponer v_0 en sus componentes

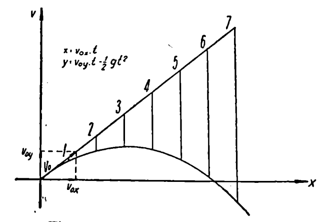


Fig. 161.—*Tiro oblicuo en el vacío.*

v_{oy} y v_{ox} según los ejes; entonces tendremos un movimiento uniforme según x, y uno uniformemente retardado según y, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_{ox} \cdot t \qquad [30]$$

$$y = v_{oy} \cdot t - ½ \, gt^2 \qquad [31]$$

Para deducir la ecuación de la trayectoria se despeja t en la [30] y se reemplaza en [31].

$$t = \frac{x}{v_{ox}}$$

$$y = v_{oy} \cdot \frac{x}{v_{ox}} - ½ \, g \frac{x^2}{v_{ox}^2} \qquad [32]$$

Es fácil comprender que una vez fijado v_o y la inclinación α del tiro, quedan determinados v_{ox} y v_{oy}, de modo que los coeficientes

$$A = \frac{v_{oy}}{v_{ox}}$$

$$B = \frac{g}{2 \, v_{ox}^2}$$

de la fórmula [32] son constantes. Queda por tanto la trayectoria representada por una ecuación de la forma:

$$y = A \, x + B \, x^2 \qquad [33]$$

que representa una parábola llamada parábola de tiro.

Se llama *alcance* del tiro a la distancia X_o a la cual el proyectil vuelve a pasar por el plano horizontal de donde partió. En la ecuación [32], si imponemos la condición $y = 0$ y calculamos los valores de x correspondientes resulta:

de: $$0 = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} \cdot X_o - \frac{g}{2 \, v_{ox}^2} X_o^2 \qquad [34]$$

de donde:

$$X_o = 0, \text{ o bien } X_o = 2 \, \frac{v_{oy} \, v_{ox}}{g}$$

El primer valor corresponde al punto de partida. El segundo da el alcance máximo.

Si recordamos las definiciones de *seno* y *coseno* vemos que:

$$v_{ox} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{oy} = v_0 \text{ sen } \alpha \qquad [35]$$

y reemplazando en [34] se obtiene:

$$X_0 = \frac{2 v_0^2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha}{g} \qquad [36]$$

Se demuestra que el producto 2 *sen α cos α* adquiere su valor máximo igual a la unidad cuando $\alpha = 45°$. En ese caso el alcance es máximo, siendo su valor

$$X_0 = \frac{v_0^2}{g} \qquad [37]$$

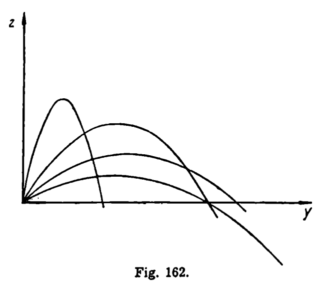


Fig. 162.

Las parábolas de tiro para distintos valores de α y v_0 constante están representadas en la fig. 162.

CAPÍTULO VI

TRABAJO MECÁNICO - ENERGÍA - APLICACIONES

§ 66.— **Trabajo mecánico.** — Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo que se desplaza, decimos que efectúa *trabajo mecánico.*

Si sobre el punto *A* actúa la fuerza de intensidad F y se produce el desplazamiento AA' en la dirección de la fuerza, el producto *F. AA'* mide el trabajo efectuado (figura 163).

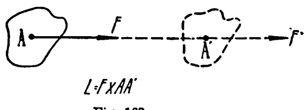


Fig. 163.

Si el camino AA' = e forma un ángulo α con la dirección de la fuerza (fig. 164), se llama *trabajo de la fuerza* al producto:

$$L = F \cdot e \cdot \cos\alpha \qquad [1]$$

Trabajo = fuerza × espacio × coseno del ángulo comprendido.

En la fórmula [1] el producto *F cos* α representa la componente de la intensidad de la fuerza en la dirección del camino *AA'* (fig. 165).

Por otra parte

$AA_1 = e \cos \alpha$

representa la proyección del camino sobre la dirección de la fuerza.

Fig. 164.—$L = F \times e \times \cos\alpha$

Por tanto puede decirse que el trabajo es igual al producto del camino e por la componente F_1 de la fuerza en su dirección o bien al producto de la intensidad de la fuerza F, por la pro-

yección AA_1 del camino en la dirección de la fuerza.

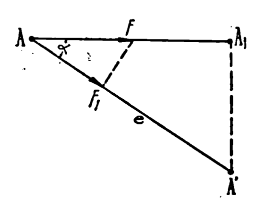


Fig. 165.—$L = F \times A\,A_1 = F_1 \times A\,A'$

Si el desplazamiento se produce en dirección perpendicular a la de la fuerza, el trabajo es nulo por ser

$$\cos \alpha = \cos 90° = 0$$

Tal es el caso de un cuerpo que se desplaza sobre un plano horizontal: *su peso P no realiza trabajo.*

Cuando $\alpha > 90°$ resulta $\cos \alpha < 0$, es decir, que el trabajo es negativo. En este caso se suele decir que el trabajo es *resistente,* ya que la fuerza se opone al desplazamiento. Tal es el trabajo del peso en un cuerpo que sube.

Unidades de trabajo.—En el sistema técnico, la unidad es el kilográmetro (Kgm), producto de 1 Kgr por 1 metro, o sea: el trabajo realizado por una fuerza de 1 Kgr al desplazarse 1 metro en la dirección de su recta de acción.

Este trabajo es el que se realiza levantando a 1 metro de altura un cuerpo que pesa 1 Kgr.

En el sistema *c. g. s.* la unidad es el *erg* o *ergio,* producto de 1 dina por 1 cm.

$$1 \; erg. = 1 \; dina \times 1 \; cm. \qquad [2]$$

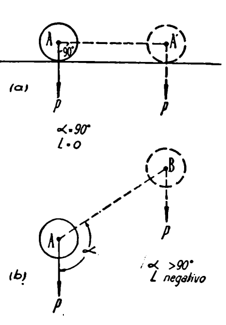


Fig. 166.—En un desplazamiento horizontal es nulo el trabajo del peso. Si el cuerpo asciende ese trabajo es negativo y si desciende es positivo.

Como:

$$\text{dina} = \frac{\text{g.cm}}{\text{seg}^2}$$

resulta:

$$\text{erg} = \text{g} \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}$$

En unidades prácticas y en el sistema m. k. s. se utiliza el *joule* o *julio,* igual a 10 millones de ergios, o sea:

$$1\ joule = 10^7\ erg = 1\ \text{newton . metro}$$

En base a estas definiciones podemos establecer las siguientes relaciones:

$$1\ \text{Kgm} = 1\ \text{Kgr} \times 1\ \text{m} = 980665\ \text{dina} \times 100\ \text{cm}$$

$$1\ Kgm = 98.066.500\ erg$$

$$1\ Kgm = 9{,}80665\ \text{joule}$$

§ 67.—**Definición general de trabajo.** En los casos en que la fuerza no es constante ni el camino es rectilíneo, para calcular el trabajo total se considera el camino dividido en pequeños elementos recti-

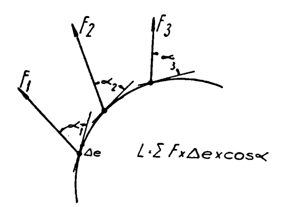


Fig. 167.—*Definición general de trabajo.*

líneos de longitud Δ *e,* durante los cuales se supone la fuerza constante y se suman los trabajos calculados para cada intervalo.

$$L = F_1\ \Delta\ e_1 \cos \alpha_1 + F_2\ \Delta\ e_2 \cos \alpha_2 + \ldots + F_n\ \Delta_n \cos \alpha_n \qquad [4]$$

que se escribe

$$L = \Sigma\ F\ .\ \Delta e \cos \alpha$$

El trabajo es una magnitud escalar.

§ 68.—**Aplicación del concepto de trabajo al estudio de las máquinas simples.**

1.—*Plano inclinado.*

Sea un plano *AB* de inclinación α sobre el cual se encuen-

tra apoyado un cuerpo de peso P, mantenido en su posición de equilibrio por la fuerza F, paralela al plano.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: su peso P, la fuerza F y la reacción del plano *N;* si hay equilibrio, la resultante debe ser nula. Imaginemos un desplazamiento SS' del cuerpo sobre el plano; la suma de los trabajos de las fuerzas que actúan debe ser nula, pues lo es el de la resultante. Como la reacción *N* es perpendicular al desplazamiento, su trabajo es igual a cero, y, por lo tanto, debe ser también nula la suma de los trabajos de las fuerzas P y F. Dichos trabajos son:

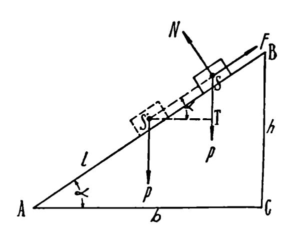


Fig. 168.—*Equilibrio en el plano inclinado*

$$L_p = P \times ST \; ; \; L = - F \times SS' \qquad [5]$$

pero de la semejanza de $\overset{\Delta}{SS'T}$ y $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{ST} = \frac{h}{l} \overline{SS'} \qquad [6]$$

luego:

$$L_p = P \cdot \frac{h}{l} \cdot SS' \qquad [7]$$

sumando L_p y L e igualando a cero:

$$L_p + L = P \cdot \frac{h}{l} \cdot SS' - F \cdot SS' - 0$$

de donde:

$$P \frac{h}{l} = F; \text{ o lo que es lo mismo:}$$



generan; una pila eléctrica podrá hacer funcionar un pequeño motor. Decimos que esos cuerpos *poseen energía,* que en cada caso llamaremos energía mecánica, química, eléctrica, etc.

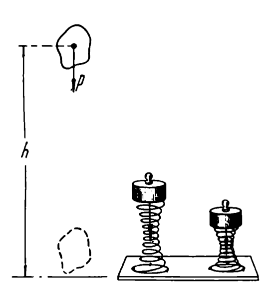


Fig. 171.—*Energía potencial.*

La energía mecánica puede ser de dos clases: en el ejemplo del cuerpo colocado a cierta altura, su capacidad para producir trabajo se debe exclusivamente a la posición que ocupa, en el ejemplo del resorte comprimido se debe a la deformación. En estos casos decimos que se trata de **energía potencial**, es decir, energía de posición o de forma.

En cambio, un cuerpo de masa m, animado de cierta velocidad, puede realizar trabajo a expensas de la misma, pues para detenerlo será necesario aplicarle una fuerza, que se desplazará realizando trabajo.

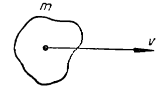


Fig. 172.—*Una masa en movimiento posee energía cinética.*

Decimos que posee **energía cinética**, es decir, energía de movimiento.

Tal es el caso del martillo, que cayendo sobre la hoja de metal la deforma transformando su energía cinética en trabajo de deformación.

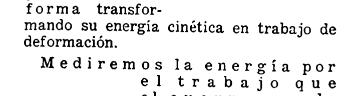


Fig. 173.—*La energía cinética del martillo se transforma en trabajo de deformación.*

Mediremos la energía por el trabajo que el cuerpo puede realizar.

§ 70. — **Cálculo de la energía potencial.** — El cálculo de la energía potencial debida a la posición del cuerpo con respecto a la tierra, es muy sencillo.



Si consideramos un cuerpo de peso P colocado a una altura h sobre el suelo cayendo verticalmente hasta el nivel del suelo, su peso realizará un trabajo:

$$L = Ph$$

que mide la energía potencial inicial del cuerpo:

$$E_p = Ph = Mgh \qquad [10]$$

Se comprende que este valor depende del nivel del plano al cual asignamos energía potencial *cero* (nivel del suelo). En general, sólo es necesario referirse a las *variaciones* de energía potencial debidas a las variaciones de altura. Si el cuerpo se mueve sobre un plano horizontal su energía potencial permanecerá constante, y si se desplaza en una dirección cualquiera, sólo interesa, para el cálculo de la variación de energía potencial, la *diferencia de nivel* entre las posiciones inicial y final, pues por la definición de trabajo, éste se obtiene multiplicando la intensidad de la fuerza (en este caso el peso) por la proyección del camino recorrido en la dirección de la fuerza (diferencia de nivel h).

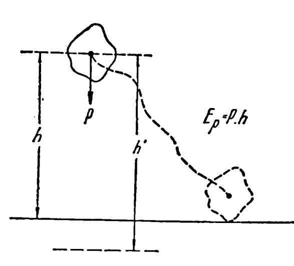


Fig. 174.—*La variación de energía potencial es igual al peso por la variación de nivel, cualquiera sea el camino.*

Como la energía potencial a u m e n t a a l s u b i r e l c u e r p o, y en ese caso el trabajo del peso es negativo, diremos: el t r a b a j o d e l p e s o, c a m b i a d o d e s i g n o, m i d e e l a u m e n t o d e e n e r g í a p o t e n c i a l.

§ 71.— **Cálculo de la energía cinética.** — Consideremos un cuerpo de masa m, animado de velocidad v. Para medir su energía cinética apliquemos una fuerza f en sentido contrario



a v, la cual proporcionará una aceleración negativa $a = \frac{f}{m}$ de modo que el movimiento se hace uniformemente retardado. El trabajo realizado por la fuerza f hasta que el cuerpo se haya detenido nos medirá la energía cinética inicial, cambiada de signo.

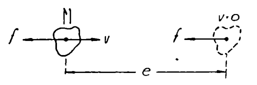


Fig. 175. — *La energía cinética se mide por el trabajo de la fuerza que detiene al cuerpo.*

Dicho trabajo será:

$$L = - f \cdot e$$

Pero:

$$e = vt - \tfrac{1}{2} at^2 = \frac{v^2}{2a} \text{ [ver probl. c, § 52], pues}$$

$$t = \frac{v}{a} \text{ por ser nula la velocidad final.}$$

y como $f = ma$, resulta:

$$L = - ma \frac{v^2}{2a} = - \frac{mv^2}{2}$$

La energía cinética será entonces:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \qquad [11]$$

§ 72. — **Teorema de las fuerzas vivas.** — Supongamos un cuerpo de masa m en reposo a la altura h. Si lo dejamos caer libremente seguirá una trayectoria vertical AB con movimiento uniformemente acelerado, llegando al suelo con velocidad v, y energía cinética $\frac{1}{2}$ mv² (fig. 176).

En el recorrido AB = h el peso del cuerpo habrá realizado un trabajo:

$$L = P \cdot h = mgh \qquad [12]$$

Es fácil verificar que este trabajo es equivalente a la



energía cinética adquirida, ya que se tiene por las leyes del movimiento de caída libre:

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

$$v = gt$$

y reemplazando en la [12]

$$L = mgh = mg \cdot \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} mg^2t^2$$

o sea:

$$L = \frac{1}{2} m [gt]^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad [13]$$

Puede ocurrir que la fuerza aplicada a un cuerpo que parte del reposo no sea su peso, sino cualquier otra, y también se verificará que el cuerpo adquiere una energía cinética igual al trabajo de la fuerza.

$$L = F \cdot e = \frac{1}{2} mv^2 \quad [14]$$

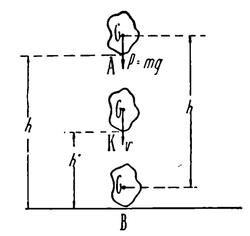


Fig. 176.—*Transformación de energía potencial en cinética.*

Si la velocidad inicial no es nula, el trabajo de la fuerza aplicada al cuerpo será igual a la variación de la energía cinética.

Llamando v_1 y v_2 las velocidades inicial y final, y e_1 y e_2 los espacios recorridos en los instantes correspondientes, (fig. 177), es fácil probar para una fuerza F que:

$$L = F [e_2 - e_1] = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

0 — e_1 v_1 — e_2 v_2

Fig. 177.

o sea que:

$$L = \frac{1}{2} m [v_2^2 - v_1^2] \quad [15]$$



Refiriéndonos al caso del cuerpo que cae verticalmente (fig. 176), vemos que al llegar a un punto tal como K tiene una energía cinética $\frac{1}{2}\, mv'^2$.

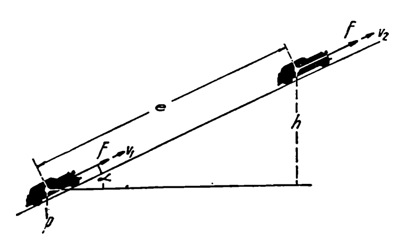
El trabajo del peso en el trayecto h', que le falta para llegar al suelo cumple la condición:

$$P \cdot h' = \frac{1}{2}\, mv^2 - \frac{1}{2}\, mv'^2 \text{ [1]}$$

La fórmula [15] expresa el teorema de las fuerzas vivas, pues al producto $\frac{1}{2}\, mv^2$ se lo llama *fuerza viva*.

Este teorema se puede enunciar, generalizándolo para un sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo, del siguiente modo: *La suma de los trabajos de todas las fuerzas exteriores que obran sobre un cuerpo es igual a la variación total de fuerza viva que ellas le imprimen.*

§ 73. — **Aplicación.** — Imaginemos un móvil de peso P que sube por un plano inclinado bajo la acción de una fuerza constante F (si es un automóvil, suponemos que la acción del motor equivale a la de una fuerza de tracción F) (fig. 178).



Las fuerzas que actúan son P y F. Apliquemos el teorema de las fuerzas vivas:

(1) Teniendo en cuenta que $\frac{1}{2}\, mv'^2$ es igual al trabajo P (h-h') para recorrer AK, es fácil comprobar que la suma $\frac{1}{2}\, mv'^2 + Ph' = Ph$, o sea, que en cualquier posición la suma de las energías potencial y cinética del cuerpo que cae es un valor constante e igual a la energía potencia *Ph de la posición inicial.*



Trabajo de la fuerza F: $L = F \cdot e$

„ del peso: $L_p = - P \cdot h$

Variación de fuerza viva: $E_2 - E_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$

Por lo tanto:

$$F \cdot e - P \cdot h = \frac{1}{2} m [v_2^2 - v_1^2] \qquad [16]$$

Si conocemos el peso *P*, las velocidades v_1 y v_2, el camino *e* y la altura *h*, podremos calcular la fuerza *F* de tracción:

$$F = \frac{\frac{1}{2} m [v_2^2 - v_1^2] + Ph}{e} \qquad [17]$$

Si

$$P = 2.000 \text{ Kgr} \quad m = \frac{2.000 \text{ Kgr seg}^2}{9.81 \text{ m}}$$

$$v_2 = 60 \text{ Km/h} = 16.66 \text{ m/seg}$$

$$v_1 = 30 \text{ Km/h} = 8.33 \text{ m/seg}$$

$$e = 100 \text{ m}$$

$$h = 5 \text{ m}$$

resulta según [17]

$$F = \frac{\frac{1}{2} \frac{2.000}{9.8} [16.66^2 - 8.33^2] + 2.000 \times 5}{100} \text{ Kgr}$$

$$F = 312 \text{ Kgr}$$

Esta fuerza es la suma de otras dos: la fuerza necesaria para equilibrar el cuerpo $[F_1 = P \frac{h}{e} = 100 \text{ Kgr}]$, y, además, la que se necesita para producir una aceleración tal que en los 100 m de recorrido la velocidad aumente de 30 a 60 Km/hora.

§ 74.— **Unidades.** — Como la energía se mide por el trabajo que puede producir el sistema, la unidad de energía será la misma que la de trabajo:

Sistema	técnico	Kgm
„	c. g. s	erg
„	práctico y m. k. s.	joule

§ 75.— **Potencia.** — Se llama *potencia* al trabajo realizado en la unidad de tiempo. Si se realiza un trabajo L en el tiempo t, la potencia será:

$$W = \frac{L}{t} \qquad [18]$$

De acuerdo con las unidades de trabajo y tiempo, las unidades de potencia serán:

Sistema	técnico	$\frac{Kgm}{seg}$
„	c. g. s.	$\frac{erg}{seg}$
„	m k s	$\frac{Joule}{seg}$ = watt o vatio

En la técnica se usa con frecuencia otra unidad, en la cual se expresan las potencias de las máquinas: es el *caballo vapor* (C. V.), equivalente a 75 Kgm/seg. Prácticamente equivale al HP (Horse Power), unidad inglesa igual a 550 $\frac{\text{pie libra}}{\text{segundo}}$

$\cong 76 \frac{Kgm}{seg}$

Sin embargo, se utiliza corrientemente el caballo vapor con la designación *HP* asignándole 75 Kgm/seg.

Las equivalencias entre unas y otras unidades pueden deducirse fácilmente:

$$CV = 75 \frac{Kgm}{seg} = 75 \times 98066500 \frac{erg}{seg} = 75 \times 9{,}80665 \frac{Joule}{seg} = $$
$$= 736 \text{ watt}$$

Se utiliza también el Kilowatt = 1000 watt.

Ahora resulta el trabajo como producto de potencia por tiempo: $L = W \cdot t$, y se utilizan las unidades:

$$CVH = \text{caballo vapor hora} = 75 \frac{Kgm}{seg} \times 3600 \text{ seg}$$

$$Wh = \text{watt-hora} = 1 \text{ W} \times 3600 \text{ seg} = 3600 \text{ joule}$$

$$Kwh = 1000 \text{ watt-hora} = 3600000 \text{ joule}$$

TABLA VI

EQUIVALENCIA DE UNIDADES

TRABAJO

	Erg.	Joule	Kgm
Erg	1	10^{-7}	$1{,}02 \times 10^{-8}$
Joule	10^{7}	1	0,102
Kgm	$9{,}81 \times 10^{7}$	9,81	1
Watt-hora ...	$3{,}6 \times 10^{10}$	3600	367,2
Kwh	$3{,}6 \times 10^{13}$	$3{,}6 \times 10^{6}$	$3{,}672 \times 10^{5}$
C. V. H.	$2{,}65 \times 10^{13}$	$2{,}65 \times 10^{6}$	$2{,}7 \times 10^{5}$

TABLA VII

POTENCIA

	Erg/seg	W	KW	Kgm/seg	CV
Erg/seg ...	1	10^{-7}	10^{-10}	$1{,}02 \times 10^{-8}$	$1{,}36 \times 10^{-10}$
Watt	10^{7}	1	10^{-3}	0,102	$1{,}36 \times 10^{-3}$
KW	10^{10}	1000	1	102	1,36
Kgm/seg .	$9{,}81 \times 10^{7}$	9,81	0,00981	1	0,0133
CV	736×10^{7}	736	0,736	75	1
Poncelet ..	981×10^{7}	981	0,981	100	1,33

§ 76. — **Principio de conservación de la energía mecánica.** — Implícitamente hemos estado aplicando, en los ejemplos citados hasta aquí, el *principio de conservación de la energía mecánica* que es un caso particular del principio más general de *conservación de la energía.*



Hemos visto cómo, en el cuerpo que cae libremente, la energía potencial se transforma en energía cinética; en el cuerpo que, sometido a la acción de una fuerza *F* asciende por un plano inclinado (§ 73), hemos admitido que la suma algebraica del trabajo del peso y el de la fuerza aplicada es igual a la variación de energía cinética. Pero el trabajo del peso, cambiado de signo, mide el aumento de energía potencial, de modo que podemos decir (ver fórmula [10], § 70): el trabajo de la fuerza *F* es igual a la suma de los aumentos de las energías cinética y potencial del cuerpo.

Si llamamos **energía mecánica** a la suma de la cinética y la potencial, enunciamos así el **principio de conservación de la energía mecánica:**

En toda transformación puramente mecánica, el trabajo de las fuerzas exteriores es igual al aumento de la energía mecánica.

Aclaremos que llamamos fuerzas exteriores a las que ejercen otros cuerpos sobre el que consideramos.

Volvamos al ejemplo del cuerpo que cae libremente desde la altura h. Allí posee energía potencial; cae, disminuyendo su energía potencial mientras aumenta la energía cinética. Al llegar al suelo, en el trabajo de las deformaciones que se producen en el cuerpo y en el suelo, se emplea la energía cinética perdida, y veremos más adelante que ese trabajo se transforma a su vez en otra forma de energía (calor).

§ 77. — **Frotamiento.** — Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de los cuerpos y el deslizamiento de uno sobre otro, imaginando que no existían fuerzas de frotamiento.

En realidad, cuando un cuerpo está apoyado sobre otro, para ponerlo en movimiento o para mantener su velocidad constante es necesario aplicar una fuerza, cuya única función es la de equilibrar las resistencias debidas al frotamiento que se produce en la superficie de contacto.

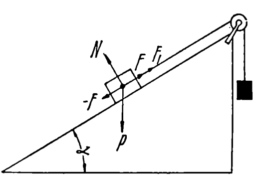


Fig. 179. — *Resistencia al desplazamiento en un plano inclinado con frotamiento.*

Si el cuerpo de peso P está apoyado sobre un plano inclinado, la fuerza

$$F = P. \; sen \; \alpha$$

equilibrará a la componente del peso en la direc-

ción del plano; pero si queremos que el cuerpo se desplace, ascendiendo por el plano con velocidad constante, será necesario aplicar una fuerza $F_1 = F + R$, en que R es la fuerza de frotamiento (fig. 179).

Distinguiremos dos clases de frotamiento: **por deslizamiento y por rodadura.**

§ 78. — **Frotamiento por deslizamiento.** — Se produce cuando el cuerpo que se mueve se *desliza* sobre el otro.

Supongamos el caso de la fig. 179. Para que el cuerpo *inicie* su movimiento será necesario aumentar la fuerza F de un valor:

$$R_0 = k_0 N \qquad [19]$$

es decir, proporcional a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el plano y a un coeficiente k_0, que llamaremos *coeficiente de frotamiento en reposo.*

Una vez iniciado el movimiento, para mantener constante la velocidad, la fuerza necesaria (siempre nos referimos al exceso sobre la fuerza F que equilibra la componente del peso), será, en general, diferente:

$$R = k\,N \qquad [20]$$

pero también proporcional a la fuerza normal N y a un coeficiente numérico k que no depende del área de la superficie de contacto y sólo depende de la naturaleza y estado de las mismas, llamado *coeficiente de frotamiento por deslizamiento.*

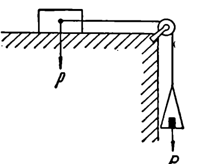


Fig. 180.—*Tribómetro para la medida de coeficientes de frotamiento.*

Coulomb estudió y determinó las leyes del frotamiento (1781) con el dispositivo de la figura 180, llamado *tribómetro,* en el cual el peso p mide la fuerza R de frotamiento. Y enunció las siguientes leyes:

1º) La fuerza R es proporcional al peso P (en general, a la fuerza normal al plano de deslizamiento).

2º) Es independiente del área de la superficie de contacto.

3º) Es sensiblemente independiente de la velocidad.

En los mecanismos se disminuye el frotamiento interponiendo lubricantes entre las superficies.

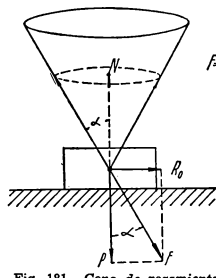
§ 78 a. — De acuerdo con lo dicho, para que un cuerpo apoyado sobre un plano horizontal comience á deslizarse, será necesario aplicar una fuerza:

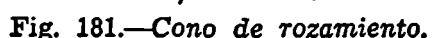
$$R_0 > k_0 \,.\, P$$

Para valores menores, el cuerpo quedará en reposo. La resultante de estas fuerzas, R_0 y P, no es perpendicular al plano, y la reacción del mismo (igual y contraria), tampoco lo será. El ángulo α da la inclinación de la resultante para la cual comienza el movimiento. Su valor cumple la condición

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{R_0}{P} = k_0.$$

Imaginando fuerzas aplicadas en todas las direcciones alrededor de *P* queda determinada una superficie cónica de




Fig. 181.—*Cono de rozamiento.*

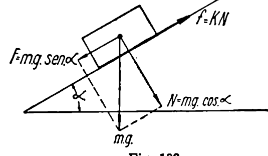


Fig. 182.

ángulo α que delimita el cono de rozamiento (fig. 181).

En todos los casos en que la reacción del plano sea interior a dicha superficie, el cuerpo permanecerá en reposo.

§ 79.— **Aplicación.** — Calcular la aceleración de caída por un plano inclinado de inclinación α para un cuerpo que se desliza, siendo *k* el coeficiente de frotamiento (fig. 182).

La fuerza que mueve el cuerpo sobre el plano será la diferencia entre la componente del peso $F = mg$ sen α, y la fuerza de frotamiento (proporcional a la componente del peso en dirección normal al plano): $f = kN = k \cdot mg \cos \alpha$.

La aceleración debe cumplir el principio de masa:

$$m.a = F - f = mg\ \mathrm{sen}\ \alpha - kmg \cos \alpha$$

de donde, dividiendo por m:

$$a = g\ [\mathrm{sen}\ \alpha - k \cos \alpha] \qquad [21]$$

Si *sen* α = *k cos* α el movimiento es uniforme, y en ese caso resulta $k = \frac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \mathrm{tg}\ \alpha$. Si: sen α < k cos α, es: $F < f$, y el cuerpo queda en reposo sobre el plano.

§ 80.— Las leyes de Coulomb no son rigurosamente exactas. Ante todo, debe tenerse en cuenta que la fuerza necesaria para iniciar el movimiento es mayor que para mantenerlo uniforme ($k_o > k$). Además, en 1855 Hirn y Petroff encontraron las siguientes leyes para piezas lubricadas:

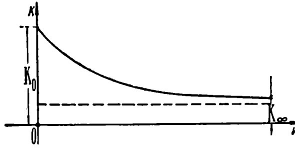


Fig. 183.—*Variación del coeficiente de frotamiento con la velocidad.*

—La fuerza de rozamiento entre piezas de máquinas bien engrasadas es, a igualdad de condiciones, proporcional a las superficies.

—La fuerza de frotamiento es proporcional a la velocidad.

—Es inversamente proporcional al espesor medio de la capa lubricante.

—Es proporcional a la raíz cuadrada de la presión total.

A pesar de esto, para pequeñas velocidades pueden admitirse con suficiente aproximación las leyes de Coulomb.

TABLA VIII

COEFICIENTES DE ROZAMIENTO

Substancias en contacto	Ko			K		
	Secas	Engrasadas	Con agua	Secas	Engrasadas	Con agua
Acero/hielo ..	0,15	0,12 - 0,11	—	0,09 - 0,03	0,009	—
Acero/acero .	0,6 - 0,5	0,1	—	0,5 - 0,2	0,08 - 0,02	0,26 - 0,22
Metal/madera.	0,65	0,2	—	0,4 - 0,2	0,16 - 0,04	0,25
Madera/mad. .	0,6	0,25 - 0,12	0,7	0,5 - 0,25	0,15 - 0,12	0,36
Cuero/metal .	hasta 0,7	0,4	0,62	0,3	—	—
Madera/piedra	0,76		—	—	—	—
Mampostería / hormigón ..	0,027	—	—	0,014	—	—

§ 81.— **Frotamiento por rodadura.**

Cuando rueda un cilindro sobre un plano, se manifiesta una resistencia al movimiento llamada de **frotamiento por rodadura.**

Esta resistencia es mucho menor que en el caso del desli-



zamiento y sus leyes fueron también estudiadas por Coulomb. Se la considera debida a la deformación de las superficies en la zona de contacto, de modo que apoya sobre el plano no ya una generatriz del cilindro, sino una pequeña zona rectangular (figs. 184 y 185).

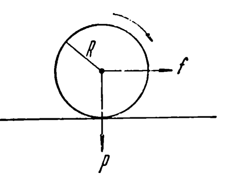


Fig. 184.—*Frotamiento por rodadura.*

De acuerdo con los estudios de Coulomb, para producir la rodadura hay que aplicar una fuerza *f* tal que su momento con respecto al punto 0 sea proporcional a la fuerza *P* que el cilindro ejerce sobre el plano:

$$M = f \cdot 2R = \varphi P \qquad [22]$$

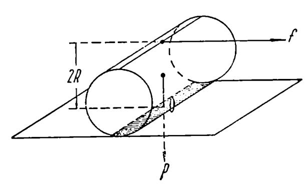


Fig. 185.—*El frotamiento por rodadura es debido a la deformación de las superficies de contacto.*

El coeficiente φ se llama **coeficiente de frotamiento por rodadura** siendo su valor:

$$\varphi = \frac{M}{P} = \frac{2\,Rf}{P} \qquad [23]$$

Este coeficiente debe tener las dimensiones de una longitud para que la fórmula sea homogénea.

Se comprende que el momento *M* puede obtenerse con una fuerza colocada a cualquier distancia de 0, con tal que cumpla la condición de ser M = φ P, su momento con respecto a dicho punto.

El hecho de que el frotamiento por rodadura sea menor que el de deslizamiento hace que en los casos en que se quie-



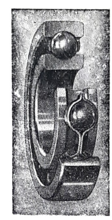
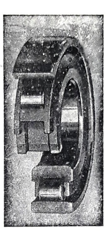



Fig. 186.—*Cojinetes a bolillas y rodillos.*

ran reducir al mínimo las fuerzas de frotamiento, se utilicen cojinetes con rodillos o bolillas.

Coeficiente de frotamiento por rodadura:

Poncelet indicó para ruedas de hierro colado, sobre rieles salientes y con engrasamiento continuo:

0,0010 a 0,0012 cm

para acero sobre acero: 0,005 cm

§ 82.—**Aplicaciones numéricas.**

1º) Se arroja un trozo de madera pulida de modo que se desliza sobre una superficie horizontal también de madera pulida y recorre $e = 68$ m hasta detenerse. ¿Cuál es la velocidad inicial si el coeficiente de rozamiento es $k = 0.3$?

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{2e\ k.g} = 19.9 \text{ m/seg}$$

2º) Un automóvil marcha a 60 Km/hora y se suprime la acción del motor. Admitiendo que el coeficiente de rozamiento es $k = \frac{1}{20}$ ¿Cuánto vale su aceleración negativa? ¿Qué camino recorre en el primer segundo y cuál es la velocidad al cabo de 10 seg?

Respuesta:

a) $a = k.g = 49 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} = 0{,}49 \text{ m/seg}^2$

b) $e_1 = 16{,}41$ m

c) $v_{10} = 11{,}76$ m/seg

CAPITULO VII

PÉNDULO - MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME - MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMÓNICO - MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

§ 83. — **Péndulo ideal - Juego de la energía - Leyes.** — Se llama *péndulo* todo cuerpo que puede oscilar alrededor de un eje fijo.

Comenzaremos estudiando el *péndulo ideal* o péndulo simple que está constituído por un *punto material* (m) suspendido de un punto fijo O, con un hilo inextensible y sin peso.

Entendemos por *punto material* un elemento de masa de dimensiones *nulas*, es decir, un elemento geométrico sin dimensiones (punto), pero, con masa diferente de cero, y, por lo tanto, pesado.

Este sistema así formado tendrá una posición de equilibrio estable (fig. 187) en la cual el hilo está vertical, y el punto material sobre la vertical que pasa por el centro de suspensión.

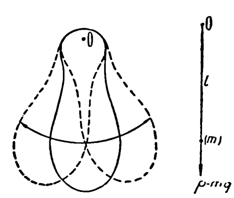


Fig. 187.—*Péndulo físico y péndulo simple.*

Separado de su posición de equilibrio, el peso sigue siendo una fuerza vertical, y podemos descomponerlo en dos fuerzas: una, en la dirección del hilo ($f_2 = p \cos \alpha$), y otra, en dirección normal al hilo ($f_1 = p \text{ sen } \alpha$) que esta dirigida siempre hacia la posición de equilibrio (fig. 188) Por el principio de masa, deducimos que el punto material se moverá siempre con aceleración dirigida hacia la posición de equilibrio estable, pues la fuerza f_2 está equilibrada por la reacción del hilo, al cual hemos impuesto la condición de ser inextensible para que su longitud permanezca constante.

Abandonando, pues, el péndulo a sí mismo en la posición OA_1, la masa (m) se mueve con movimiento acelerado. Cuando pasa por la posición vertical, ha adquirido cierta velocidad, pero en ese preciso instante la fuerza f_1 y, por lo tanto la aceleración tangencial, son nulas. Entonces continúa moviéndose hacia la izquierda, y la aceleración se hace negativa creciente, disminuyendo la velocidad hasta anularse e invertirse el movimiento, dirigiéndose ahora nuevamente hacia la posición de equilibrio. Continúa así el péndulo oscilando alrededor de la posición OA.

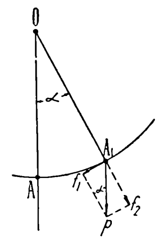


Fig. 188.

Es interesante analizar el funcionamiento del péndulo, desde el punto de vista de la conservación de la energía. Por lo pronto, se trata de un sistema que no realiza trabajo exterior, de modo que su energía total (potencial + cinética) debe permanecer constante; suponiendo que se encuentra en el vacío, es decir, sin resistencia del aire y sin rozamiento en O.

En la posición 1 (fig. 189), de máxima elongación (ángulo que forma con la posición de equilibrio) hacia la derecha, la masa ocupa la posición de altura máxima, y en ese instante en que se invierte el movimiento, su velocidad (y su energía cinética) es nula.

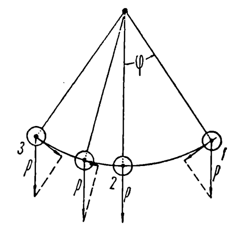


Fig. 189.—*Variación de la fuerza que mueve el péndulo.*

Luego, al moverse hacia la posición 2, va disminuyendo la energía potencial y aumentando la cinética, que llegan a sus valores mínimo y máximo, respectivamente. Pasando de 2 hacia 3, se produce el proceso inverso, siendo en 3 máxima la energía potencial y nula la cinética.

Se llama **oscilación simple** al recorrido 1 - 3, o viceversa (fig. 190). **Oscilación doble** o completa es el recorrido 1 - 2 - 3 - 2 - 1, o, en general, es el camino que recorre a partir de una posición cualquiera hasta volver a pasar por la misma posición y en el mismo sentido (fig. 191).

Tiempo de oscilación, simple o doble, es el tiempo que tarda el péndulo en cumplir *una* oscilación simple o doble.

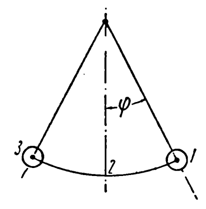


Fig. 190.

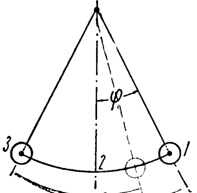


Fig. 191.—*Definición de oscilación doble.*

Amplitud de oscilación es el ángulo que forma la posición de máxima elongación con la de equilibrio (φ).

Se comprende que un péndulo ideal, tal como lo hemos definido, no es realizable experimentalmente.

Los péndulos que podemos construir son péndulos físicos, es decir, constituídos por *cuerpos materiales,* en los cuales la resistencia del aire y el roce en el eje de suspensión, provocan una disminución progresiva de velocidad, hasta detenerlos. En este caso decimos que hay amortiguamiento.

Puede, sin embargo, construirse un péndulo físico en condiciones muy próximas a la del péndulo ideal, tomando una pequeña esfera metálica (de aproximadamente 1 cm de radio), y colgándola con un hilo resistente, pero muy liviano en comparación con el peso de la esfera, de una longitud de más de 1 metro (preferible 2 a 3 metros).

Se podrán comprobar experimentalmente las siguientes leyes:

Fig. 192. — *Esquema de péndulo compuesto.*

1º) El tiempo de oscilación es independiente de la masa colocada en el extremo del péndulo.

2º). Para oscilaciones de pequeña amplitud, el tiempo de oscilación es independiente de la amplitud (ley de isocronismo).

3º) En péndulos de diferente longitud, los tiempos de oscilación son proporcionales a las raíces cuadradas de las longitudes:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} \qquad [1]$$

4º) En distintos lugares de la Tierra, los tiempos de oscilación de un mismo péndulo son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de las aceleraciones de la gravedad.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}} \qquad [2]$$

Estas leyes se recuerdan fácilmente con la fórmula para el cálculo del tiempo de oscilación:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{oscilación simple} \quad [3]$$

o bien, para el período:

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{oscilación doble} \quad [4]$$

§ 84.—**Comprobación de las leyes del péndulo.**

1ª ley) Se toman dos péndulos de igual longitud, y se colocan en sus extremos esferas de distinto material e igual radio. Separándolos de su posición de equilibrio y soltándolos al mismo tiempo, se observa que durante muchas oscilaciones *mantienen el sincronismo,* es decir, pasan simultáneamente por su posición de equilibrio. Será conveniente cuidar que las longitudes sean exactamente iguales.

Puede ocurrir que las oscilaciones del más liviano disminuyan más rápidamente de amplitud, pero el sincronismo se mantiene.

2ª ley) La misma experiencia anterior dando diferentes elongaciones iniciales.

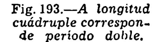


Fig. 193.—*A longitud cuádruple corresponde período doble.*

3ª ley) Con dos péndulos de longitudes en la relación *1 a 4*. Cuando el péndulo mas corto cumple una oscilación doble, el más largo sólo cumple una oscilación simple.

4ª ley) Con

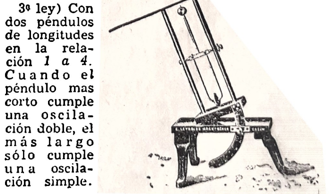


Fig. 194.—*Péndulo de Mach.*

el péndulo de Mach, figura 194, cuyo plano de oscilación se inclina formando un ángulo α con la vertical y ello equivale a multiplicar g por el *coseno* α. Los tiempos serán entonces, para dos posiciones α_1 y α_2 inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de los cosenos de los ángulos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} \qquad [5]$$

§ 85. — **Péndulo físico.** — Los péndulos realizados con un cuerpo cualquiera que oscila, por ejemplo, los péndulos de los relojes, se llaman péndulos físicos o péndulos compuestos.

Todo péndulo físico tiene un tiempo de oscilación bien determinado. De las fórmulas [3] o [4], se puede deducir la longitud del péndulo simple cuyo tiempo de oscilación es igual al del péndulo compuesto. Esta *longitud* se llama **longitud reducida** del péndulo compuesto, o simplemente longitud del **péndulo simple sincrónico.**

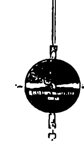


Fig. 195.—*Modelo de péndulo físico o compuesto.*

Péndulo que bate el segundo es aquel cuyo tiempo de oscilación simple es 1 seg; su longitud, para aceleración normal de la gravedad, es:

$$l = \frac{t^2 g}{\pi^2} = \frac{1^2 . 9{,}80665}{3{,}1416^2} = 0{,}9936 \text{ m}$$

Si es u n s e g u n d o el tiempo de oscilación d o b l e, la longitud debe ser:

$$l_1 = \frac{l}{4} = 0{,}2484 \text{ m} = 24{,}84 \text{ cm}$$

§ 86. — **Determinación de la aceleración de la gravedad.** El péndulo proporciona uno de los métodos más exactos para determinar la aceleración de la gravedad.

Si tomamos un péndulo como hemos descrito ya, formado por una pequeña esfera colgada por un hilo muy largo y liviano, en comparación con las dimensiones de la esfera, nos aproximamos a las condiciones del péndulo ideal (punto material colgado con hilo sin peso), y de la medida del tiempo de oscilación y la longitud hasta el centro de la esfera deducimos (fórm. [4]):

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad [6]$$

Para obtener buenos resultados será necesario medir muy bien l y, sobre todo, T, el tiempo de oscilación, pues el error relativo de su medida se duplica al elevarlo al cuadrado para aplicar la fórmula.

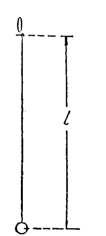


Fig. 196.

Por otras consideraciones se deduce que el péndulo así constituído, si es r el radio de la esfera, tiene un tiempo de oscilación igual al del péndulo ideal de longitud:

$$l_1 = l + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l} \qquad [7]$$

con esta fórmula se comprende que es suficientemente aproximado operar con la longitud l en los casos en que $\frac{r}{l}$ es muy pequeño.

Así por ejemplo: si $l = 2$ m, y $r = 2$ cm se tiene:

$$l_1 = 2 \text{ m} + \frac{2}{5}\frac{(0.02)^2}{2} \text{ m} = 2 \text{ m} + 0.00008 \text{ m} \quad ;$$

Resulta una corrección de 8 centésimos de milímetro, que, en general es menor que la aproximación con que se ha medido l.

En cuanto a la validez de la fórmula de isocronismo, si se quiere tener en cuenta la amplitud de las oscilaciones en el cálculo del tiempo de oscilación debe aplicarse la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \qquad [8]$$

siendo α el ángulo de amplitud máxima expresado en radianes.

Para $\alpha = 5^o = 0.09$ radian, el término correctivo es:

$$\frac{\alpha^2}{16} = \frac{0.0081}{16} = 0.0005$$

o sea, que influye solamente 5 diez milésimos de T, valor que, en general no se alcanza a apreciar en experiencias de poca duración.

§ 87.— Movimiento circular uniforme.

Se llama **movimiento circular uniforme**

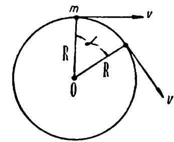


Fig. 197.—*Movimiento circular uniforme.*

al de un punto que se mueve sobre una circunferencia, recorriendo arcos iguales en tiempos iguales. **Radio vector** es el que une el centro de la circunferencia con el punto móvil. **Velocidad angular** es el ángulo barrido por el radio vector en la unidad de tiempo. Si recorre un ángulo α en el tiempo *t*, la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \qquad [9]$$

Midiendo α en radianes resulta:

$$[\omega] = \frac{1}{\text{seg}} \qquad [10]$$

porque el radián es magnitud sin dimensión (o dimensión cero, pues es el cociente de dos longitudes.

La **velocidad numérica** *v* es la longitud del arco descrito en la unidad de tiempo, y es constante.

La velocidad del punto está representada por un vector que en cada instante es tangente a la trayectoria, y cuyo módulo es la velocidad numérica; se llama **velocidad tangencial.**

Como la medida de un arco es igual al producto del ángulo por el radio, resulta:

$$v = \omega R \qquad [11]$$

Midiendo *R* en metros, resulta, en virtud de [10]

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{seg}} \qquad [12]$$

Es interesante destacar que en este movimiento, como es *uniforme*, la velocidad numérica es constante, y la aceleración numérica es nula, o sea, no hay aceleración en la dirección de la tangente: la aceleración tangencial es nula. Pero el vector velocidad no es constante, pues si bien su módulo no varía, cambia constantemente de dirección. Pasamos del vector velocidad V_1, en un punto cualquiera, al V_2 en un punto próximo, sumando

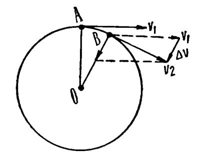


Fig. 198.—*Variación del vector velocidad en el movimiento circular uniforme.*

el pequeño vector Δ V. Para un arco AB cuya longitud se acerca a cero, Δ V está dirigido normalmente a la trayectoria, o, lo que es lo mismo, dirigido hacia el centro de curvatura. Hay, por lo tanto, **aceleración normal** (fig. 198).

Debemos hacer notar que estos razonamientos podemos aplicarlos a cualquier trayectoria curvilínea, aunque no sea una circunferencia.

Nos proponemos calcular la *aceleración normal* o *centrípeta,* es decir, dirigida hacia el centro de curvatura. Para ello consideremos el movimiento sobre la circunferencia de radio *R* y centro *O.* Imaginemos el móvil en A, y a partir de un punto cualquiera *O',* tomemos un vector paralelo al que representa la velocidad en A (fig. 199).

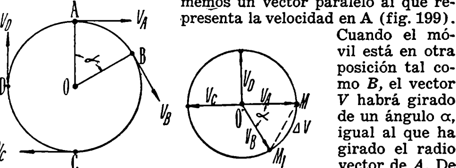


Fig. 199.—*Aceleración en el movimiento circular uniforme. Hodógrafo.*

Cuando el móvil está en otra posición tal como *B,* el vector *V* habrá girado de un ángulo α, igual al que ha girado el radio vector de *A.* De tal modo, cuando el móvil recorre la circunferencia A B C D A, el extremo del vector velocidad recorre una circunferencia de radio *V.* La cuerda MM_1 es el valor Δ V del incremento de la velocidad V_A para pasar a V_B. El cociente $\frac{MM_1}{t}$ de la cuerda por el tiempo empleado en pasar de *A* a *B* da la velocidad media del punto M, pero a su vez ese cociente es $\frac{MM_1}{t} = \frac{\Delta V}{t}$, que, por lo tanto, mide la aceleración media de *A.* Se comprende que tomando intervalos de tiempo cadavez más pequeños, dicho cociente medirá: por una parte, la velocidad de M sobre su trayectoria, y por otra parte la aceleración de *A.* Dicha velocidad será tangente en M a la circunferencia de radio V, y corresponde sobre la trayectoria de *A* a la dirección del radio, por ser penpendicular a V_A. Luego,

representa la *aceleración centrípeta del movimiento circular uniforme.*

Es fácil calcular su valor; la velocidad angular del vector $O'M$ es igual a la velocidad angular ω del móvil A. Su velocidad tangencial será el producto de la velocidad angular por el radio (fórmula [11]), que en este caso es V; luego:

$$a = \omega V \qquad]13]$$

y en virtud de [11]:

$$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R \qquad [14]$$

fórmula que permite calcular la a c e l e r a c i ó n c e n t r í p e t a en el movimiento circular uniforme.

Recalquemos que esta aceleración no modifica el módulo sino la dirección del vector velocidad. E x i s t e e n t o d o m o v i m i e n t o c u r v o aunque sea uniforme (1).

Ejemplo: Un cuerpo se mueve con velocidad 3 m/seg sobre una circunferencia de radio 2 m; la aceleración centrípeta es:

$$a = \frac{V^2}{R} = \frac{3^2 \left(\frac{m}{seg}\right)^2}{2m} = 4{,}5 \frac{m}{seg^2}$$

El tiempo T, que el móvil emplea en dar una vuelta completa, se llama **período**. El número de vueltas $n = \frac{1}{T}$, que da en una unidad de tiempo se llama **frecuencia**. Por la fórmulas vistas, es fácil deducir que:

$$\omega T = 2\pi$$
$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \qquad [15]$$

además:

$$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R \qquad [16]$$

fórmulas útiles en las aplicaciones.

§ 88.— **Fuerza centrípeta y centrífuga.**

Aplicando los conceptos de la dinámica, si en el movimiento hay aceleración, habrá fuerza.

(1) El lugar geométrico de las sucesivas posiciones del extremo del vector velocidad, tomado a partir de un punto O' del plano, se llama *hodógrafo* del movimiento. El punto O' es el *polo del hodógrafo.*

Si el móvil tiene masa *m,* actuará una **fuerza centrípeta.**

$$f = ma = m \frac{v^2}{R} \qquad [17]$$

o también:

$$f = m\,\omega^2 R = \frac{4\,\pi^2}{T^2}\,m\,R \qquad [18]$$

Esta es la fuerza que ejerce sobre el móvil el vínculo que le hace seguir su trayectoria circular. Así, por ejemplo, si hacemos girar una piedra atada en el extremo de un hilo, la trayectoria será una circunferencia, porque el hilo ejerce sobre la piedra una fuerza centrípeta que la mantiene equidistante del centro. Cuando un tren toma una curva, es la fuerza que ejercen los rieles sobre la rueda, dirigida hacia el centro de curvatura, la que le obliga a seguir su trayectoria curvilínea.

Por el principio de acción y reacción, sabemos que esa fuerza centrípeta origina una reacción igual y contraria que es la **fuerza centrífuga.** Tal es la que en nuestros ejemplos ejerce la piedra sobre el hilo o la de la rueda sobre el riel. Pero no debe olvidarse que la fuerza centrífuga es una *reacción,* que sólo existe mientras existe la acción. Así, si en el ejemplo de la piedra atada al hilo, este se corta, desaparecen la fuerza *centrípeta* y la *centrífuga* al mismo tiempo, de modo que el cuerpo continúa moviéndose *por inercia* en la dirección de la tangente.

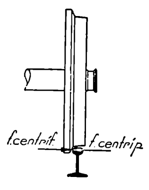


Fig. 200.—*Fuerzas centrípeta y centrífuga entre el riel y la rueda en una curva.*

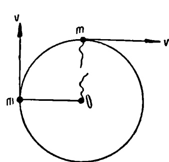


Fig. 201. — *Suprimida la fuerza centrípeta el móvil sigue en la dirección de la tangente.*

Los aparatos de la figura 202 permiten comprobar las fórmulas establecidas. En el primero, los cilindros P_1 y P_2 quedarán en su posición, aunque se haga girar el conjunto a gran velocidad, cuando $m_1 r_1 = m_2 r_2$, puesto que ω es igual para ambos y las fuerzas centrífugas son (fórmula [18]).

$$m_1 r_1\,\omega^2 = m_2 r_2\,\omega^2$$

En el segundo se observa un aplanamiento de los aros metálicos, pues la fuerza centrífuga es mayor para los puntos en que r es mayor.

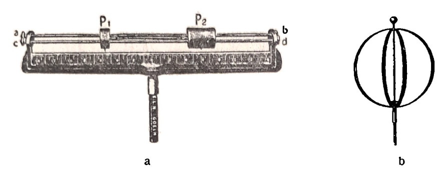


Fig. 202.—*Aparatos para experiencias sobre fuerza centrífuga.*

§ 89.—**Dirección de la vertical.**

Sabemos que todo cuerpo colocado sobre la superficie terrestre está sometido a la acción de su peso. La dirección de esta fuerza se determina con la plomada, y corrientemente se dice que está dirigida hacia el centro de la tierra. Sin embargo, eso no es rigurosamente exacto, pues el cuerpo se encuentra sometido, por una parte a la atracción de la tierra, dirigida hacia su centro, y por otra a una fuerza centrífuga que crece del polo hacia el ecuador.

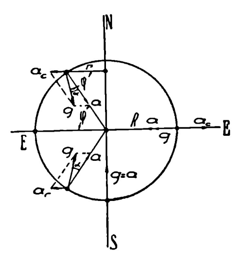


Fig. 203.—*Desviación de la vertical.*

En el polo sólo actúa la atracción de la tierra. En el ecuador la fuerza centrífuga es directamente opuesta a la atracción y si llamamos a la aceleración que produciría sólo la atracción terrestre y a_c la aceleración centrífuga se verifica: $g = a - a_c$.

Pero se ha medido $g = 978{,}07$ cm/seg² y conociendo el radio terrestre y el tiempo T de revolución se calcula:

$$a_c = 3{,}47 \text{ cm/seg}^2$$

luego resulta

$$a = g + a_c = 981{,}54 \text{ cm/seg}^2$$

valor que se obtendría sin fuerza centrífuga. Es decir, que la fuerza centrífuga disminuye aproximadamente en $\frac{1}{289}$ la atracción terrestre en el ecuador.

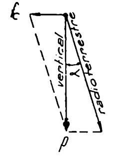


Fig. 204.—*Angulo de la vertical con el radio terrestre.*

Como la fuerza centrífuga es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, si la tierra girara sobre su eje con velocidad $\sqrt{289} = 17$ veces mayor, los cuerpos no pesarían en el ecuador.

A cualquier otra latitud, la aceleración centrífuga está contenida en el plano del paralelo y es proporcional a su radio:

$$r = R \cos \varphi$$

En este caso, la vertical, definida por la dirección de la plomada, no coincide con el radio terrestre. A 45° de latitud se tiene una desviación α de 12 minutos. de arco.

§ 90.—Movimiento oscilatorio armónico.

a) *elongación.*

El movimiento de la proyección sobre un eje, de un movimiento circular uniforme se llama m o v i m i e n t o o s c i l a t o r i o a r m ó n i c o.

Sea P la posición, en el instante t, de un punto móvil sobre la circunferencia de radio R, siendo ω la velocidad angular, y P_0 la posición correspondiente a $t = 0$. Proyectamos sobre el eje AA' y estudiamos el movimiento de la proyección M (fig. 205).

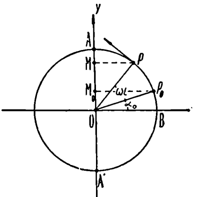


Fig. 205.—*Movimiento oscilatorio armónico.*

La distancia MO = e la llamamos e l o n g a c i ó n y su valor será:

$$e = R \text{ sen } POB \qquad [19]$$

pero el ángulo POB es

$$\alpha = POB = \omega t + \alpha_0 \qquad [20]$$

luego

$$e = R \text{ sen } (\omega t + \alpha_0) \qquad [21]$$

formula que caracteriza al movimiento oscilatorio armónico. Se observa que e varía desde $+R$ a $-R$, o sea, que M se mueve de A a A'.

Como hemos visto: $\omega = \frac{2\pi}{T}$; luego, puede también escribirse:

$$e = R \text{ sen } \left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_0 \right) \qquad [22]$$

La constante ω se llama **pulsación** del movimiento armónico.

R es la **amplitud**.

$\alpha = \omega t + \alpha_0$, es el ángulo de fase.

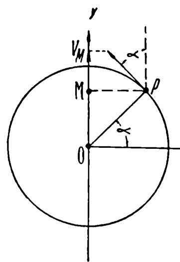


Fig. 206. — *Velocidad en el movimiento armónico.*

T = período.

α_0 = fase inicial = ángulo de fase para t = 0.

b) *Velocidad.*

La velocidad del punto *M* la calcularemos teniendo en cuenta que M es la proyección de *P*. y por lo tanto su velocidad será la proyección sobre AA' de la velocidad de *P*, cuyo valor es

$$v_p = \omega R$$

Pero v_p forma con el eje AA' un ángulo igual al ángulo $\alpha = \omega t + \alpha_0$ (fig. 206) luego:

$$v = v_p \cos\alpha = \omega R \cos(\omega t + \alpha_0) \qquad [23]$$

es decir, llamando *v* a la velocidad de *M*

$$v = \omega R \cos(\omega t + \alpha_0) \qquad [24]$$

esto nos indica que la velocidad es nula para $\omega t + \alpha_0 = 90°$ o sea cuando la elongación es máxima (en A y A'), y es máxima igual a v_p; cuando *M* pasa por *O*.

c) *Aceleración.*

La aceleración de M será también igual a la proyección de la aceleración de P. (fig. 207).

Esta es:

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

y el ánguio que forma con la dirección positiva del eje de proyección es:

$$OPY = 90° + \alpha$$

La aceleración del punto M será:

$$a = a_c \cos OPY = - a_c \text{ sen } \alpha$$

y reemplazando α_0

$$a = - \omega^2 R \text{ sen } \alpha = - \omega^2 R \text{ sen } (\omega t + \alpha_0) \qquad [25]$$

o lo que es lo mismo:

$$a = - \omega^2 e \qquad [26]$$

esta fórmula nos dice que la aceleración es proporcional a la elongación y de signo contrario, o sea, que está dirigida siempre hacia el centro O, es máxima en A y A' y nula en O.

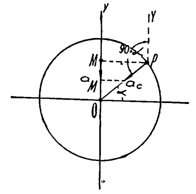


Fig. 207.—*Aceleración en el movimiento armónico.*

d) *Fuerza.*

La fuerza que actúa sobre *M*. experimentará las mismas variaciones que la aceleración, y si el punto *M* es un punto material de masa *m*, la fuerza será:

$$f = m\,a = -m\,\omega^2 R \text{ sen } (\omega\, t + \alpha_0) \quad [27]$$

luego:

$$f = -\,m\,\omega^2\,e \quad [28]$$

Como se ve, también la fuerza es proporcional a la elongación.

e) *Representación gráfica.*

Si representamos gráficamente la fórmula de la elongación, tomando sobre un eje *elongación* y sobre el otro *tiempo*, se obtiene una curva que se llama sinusoide (fig. 208).

Tomamos luego la ecuación de la velocidad, y representamos *v* como función de *t*, y lo mismo hacemos con la aceleración. Se obtienen las curvas que figuran a continuación suponiendo fase inicial nula.

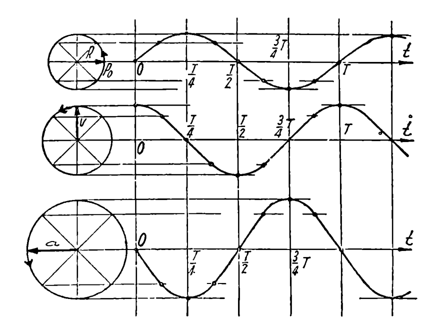


Fig. 208.—*Gráficos del movimiento armónico.*

Se observa que la curva de las elongaciones puede servir para las aceleraciones con un simple cambio de escalas en las ordenadas. La

de la velocidad se obtiene cambiando la escala, y corriendo la curva de un valor $\frac{T}{4}$.

§ 91.—**Fórmula del péndulo ideal** (§ 83, fórmulas 3 y 4)

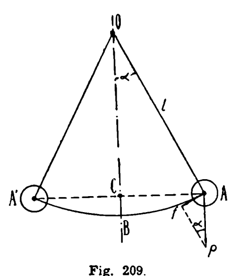


Fig. 209.

Se acaba de ver que en el movimiento oscilatorio armónico, la fuerza es proporcional a la elongación y de sentido contrario siendo ω^2 el factor de proporcionalidad.

En el péndulo ideal, la fuerza f (figura 209) se puede calcular por semejanza de los triángulos AfP y OAC, siendo:

$$f = \frac{P}{l} \overline{AC} \qquad [29]$$

y como P y l son constantes, resulta que f es proporcional a CA, y la aceleración

$$\frac{f}{m} = a = \frac{g}{l} \overline{AC} \qquad [30]$$

Para pequeñas amplitudes podemos reemplazar el movimiento sobre el arco ABA', por el movimiento sobre la cuerda ACA' y por la fórmula [30] este movimiento será oscilatorio armónico. Siendo, de acuerdo a [26], (AC = e):

$$\omega^2 = \frac{a}{l}$$

luego:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

de donde se deduce la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ya empleada en el § 83.

§ 92.—**Movimiento de los planetas - Leyes de Kepler.**

Los planetas son astros que giran alrededor del Sol, constituyendo, con la Tierra, lo que llamamos el sistema solar. Los diferenciamos de las estrellas porque se mueven con relación a lo que llamamos el cielo de estrellas fijas. Por otra parte, al

determinar sus distancias a la tierra, se comprueba que se encuentran mucho más cercanos que la estrella más próxima.

Los planetas conocidos hasta ahora, en orden de su distancia al Sol, son:

Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano Neptuno y Plutón. Además, hay un conjunto de pequeños cuerpos celestes que se llaman asteroides, la mayoría de los cuales se encuentran entre Marte y Júpiter.

Tycho Brahé observó los movimientos de los planetas, y de sus observaciones y medidas dedujo Kepler las leyes que llevan su nombre y cuyo enunciado es el siguiente:

1º) Las órbitas de los planetas son elipses, de las cuales el sol ocupa uno de los focos.

2º) Las áreas barridas por el radio vector, que une el centro del sol con el de un planeta, son proporcionales a los tiempos (velocidad areal constante).

3º) Los cuadrados de los tiempos de revolución son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de las órbitas.

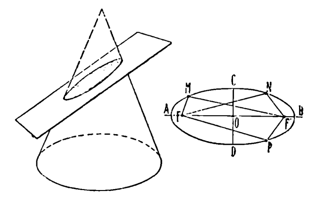


Fig. 210.—*La elipse como intersección de un cono con un plano oblicuo con respecto al eje y como lugar geométrico.*

La elipse es la sección de un cono recto circular con un plano oblicuo con respecto al eje.

Es el lugar geométrico de los puntos, cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. En la figura 210 es:

$$FM + MF' = FN + NF' = FP + PF' = \text{etc.} \qquad [31]$$

Se llama excentricidad de la elipse a la relación

$$e = \frac{OF}{OA} \qquad [32]$$

En las órbitas de los planetas la excentricidad es muy pequeña, lo que significa que los focos están muy próximos y la elipse se aproxima a una circunferencia. La recta AB que une los focos es el eje mayor.

La segunda ley nos dice que la velocidad del planeta sobre su trayectoria no es constante, pues del hecho de que las áreas barridas por el radio vector son iguales en tiempos iguales, deducimos que cuando pasa por los puntos de su trayectoria más lejanos del Sol, su velocidad debe ser mínima. En la figura 211, si AB y CD son arcos recorridos en tiempos iguales, es:

$$\text{área } \overset{\Delta}{ASB} = \text{área } \overset{\Delta}{CSD} \text{ y como } CS > AS$$

debe ser, por tanto:

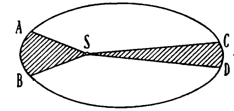


Fig. 211.—*Ley de las áreas.*

$$\text{arco } AB > \text{arco } CD.$$

La tercera ley nos dice que si T_1 y T_2 son los tiempos que tardan los planetas en recorrer sus órbitas, d_1, d_2 son los respectivos ejes mayores, se cumple la condición.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{d_1^3}{d_2^3} \qquad [33]$$

Así, por ejemplo:

Tierra: $T_1 = 1$ año; $d_1 = 1$ unidad astronómica

Júpiter: $T_2 = 11{,}862$ año; $d_2 = 5{,}2028$ unidad astronómica

se verifica:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{1^2}{11.862^2} = \frac{1}{141}$$

$$\frac{d_1^3}{d_2^3} = \frac{1^3}{5.2028^3} = \frac{1}{141}$$

§ 93.— **Ley de la gravitación universal.** — De las leyes de Kepler dedujo Newton su ley de la gravitación universal. En efecto, si se plantean las ecuaciones de la mecánica para estudiar el movimiento de un cuerpo lanzado con determinada velocidad inicial v_0, y sometido a la acción de una fuerza dirigida siempre hacia cierto punto fijo, en forma tal que disminuya con el cuadrado de la distancia, se encontrará que dicho movil cumple las dos primeras leyes de Kepler, y si son varios los cuerpos lanzados, se cumple entre ellos la tercera.

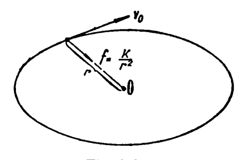


Fig. 212.

En consecuencia, los planetas se mueven como si fueran atraídos por el Sol con una fuerza proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Extendiendo el resultado, Newton enuncia su ley de la gravitación universal:

T o d o   p a s a   c o m o   s i   l o s   c u e r p o s   s e   a t r a j e r a n   p r o p o r c i o n a l m e n t e   a l   p r o d u c t o   d e   s u s   m a s a s   y e n   r a z ó n   i n v e r s a   d e l   c u a d r a d o   d e   s u s   d i s t a n c i a s:

La expresamos por la fórmula:

$$f = c \frac{MM'}{r^2} \qquad [34]$$

M — f   f — M'
— r —

Fig. 213.—*Atracción de masas.*

c es una constante universal, que sólo depende del sistema de unidades.

En unidades c. g. s.:

$$c = 6.67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{g\ seg^2}$$

Su dimensión debe ser tal que al aplicarla a la fórmula [34] resulte *f* en unidades de fuerza.

§ 94.—**Determinación de c — Masa de la tierra.**—La fórmula de Newton se comprueba en el movimiento de los planetas y de sus satélites. La constante c se determina experimentalmente de varias maneras, pero vamos a referirnos solamente a la experiencia de Cavendish (1790), basada en el péndulo de torsión.

De un fino hilo metálico pende una varilla de madera de 2 m de longitud, en cuyos extremos lleva esferas de plomo de 750 gr. cada una; colocado esto dentro de una caja que evita el efecto de las co-

rientes de aire. Exteriormente dos esreras de plomo de 150 Kg. cada una, pueden aproximarse a las anteriores· Colocadas en la posición M-M (figura 214a) atraen a las esferas pequeñas, provocando una torsión del péndulo que se observa con el microscopio *A*: llevadas luego a la posición simétrica, se lee nuevamente la posición de equilibrio con lo cual se conoce 2 α.

Conocidas las características del hilo de suspensión, en base al ángulo α se conoce la cupla que ha actuado, y por lo tanto las fuerzas de atracción.

Baily repitió la experiencia en 1843, comprobando en cerca de 2.000 ensayos que la ley de Newton y el valor *c* son aplicables a cualquier substancia, incluso a la materia orgánica.

La constante *c* permite calcular la masa terrestre, pues, admitido que el peso de los cuerpos es debido a su atracción y como se demuestra que la atracción de una esfera es la misma que si la masa estuviera concentrada en su centro, imagi-

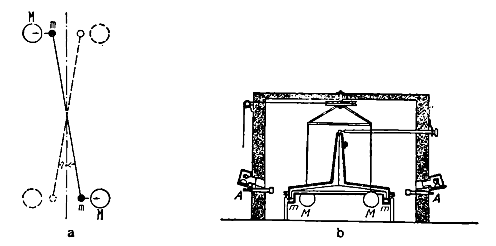


Fig. 214.—*Método de Cavendish para determinar la constante de gravitación.*

nando un cuerpo que pesa 1 Kgr = 981 000 dinas, colocado sobre la superficie terrestre (d = 6 370 Km) y aplicando la ley de Newton se tiene:

$$981.000 \text{ dinas} = \frac{1\,000 \text{ M}}{[6{,}370 \ 10^8]^2} \ 6.67 \ 10^{-8}$$

y la masa terrestre resulta entonces:

$$\text{M} = 5.98 \times 10^{27} \text{ g}$$

y su densidad media, en base al volumen:

$$\text{D} = 5.52 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Aplicación:

Calcular la fuerza de atracción que se ejerce entre dos esferas de 5862 g y 152 g respectivamente, cuyos centros distan 10,2 cm.

$$f = 6.67 \times 10^{-8} \frac{5862 \times 152}{10{,}2^2} \text{ dinas} = 5.7 \times 10^{-4} \text{ dinas}$$

$$= 5{,}81 \times 10^{-7} \text{ gr} = 0.000582 \text{ mgr}$$

§ 94 a). — **Variación de g con la latitud y la altura.**

Hemos establecido en el § 52 que el valor de g depende de la latitud, teniendo un valor máximo $g_{90} = 983{,}232$ cm/seg² en los polos y un valor mínimo $g_0 = 978{,}046$ cm/seg² en el ecuador.

Esta variación se debe a dos causas: diferencias de acción gravitatoria por los diferentes valores del radio terrestre, y diferente aceleración centrífuga en cada punto de la tierra, pues está vinculada al radio del paralelo que pasa por el lugar, de acuerdo con lo expuesto en el § 89.

El valor de la aceleración debida a la atracción en el ecuador es:

$$a_0 = g_0 + a_c = 981{,}54 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

En el polo es, en cambio:

$$a_{90} = g_{90} = 983{,}232 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

Siendo la tierra, aproximadamente, un elipsoide en rotación, cuyos meridianos tienen por semiejes:

$$a = 6\,378 \text{ Km (Radio ecuatorial)}$$

$$b = 6\,357 \text{ Km (Radio polar)}$$

puede calcularse, en unidades c, g, s, el valor de g en un lugar de latitud φ, y al nivel del mar, con la fórmula:

$$g_\varphi = g_0 \ (1 + \beta \ \text{sen}^2\varphi) = 978{,}46 \ (1 + 0.005303 \ \text{sen}^2\varphi)$$

Variación con la altura. — En un mismo lugar, este valor de g disminuye con la altura, debido a que la atracción gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Siendo h la altura sobre el *esferoide* normal y g_h el correspondiente valor de la aceleración de la gravedad, se tiene (para $\varphi = 45°$):

$$g_h = g_0 - 3{,}086 \times 10^{6} h \ \text{(c.g.s.)}$$

CAPITULO VIII

ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

§ 95.— **Rotación uniforme alrededor de un eje.**

1.— Se realiza cuando cada punto del cuerpo describe c o n m o v i m i e n t o u n i f o r m e, una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje EE' (fig. 215).

El punto M describe la circunferencia CC' con movimiento uniforme.

El radio OM, entretanto, gira ángulos iguales en tiempos iguales y lo mismo sucede con todo otro radio como OP y O_1N.

El plano EMNE' gira también el mismo angulo que los radios que contiene.

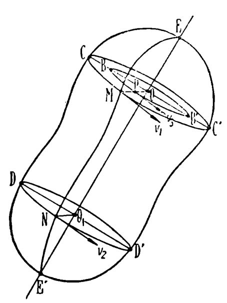


Fig. 215.—*Cuerpo rígido en rotación.*

2.—*Velocidad angular.*—Se llama *velocidad angular* del c u e r p o e n r o t a c i ó n u n i f o r m e, al á n g u l o d e s c r i p t o e n l a u n i d a d d e t i e m p o p o r u n o d e s u s p l a n o s q u e c o n t i e n e a l e j e.

Si llamamos T al tiempo de una revolución completa la velocidad angular en radianes por segundo será:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} \qquad [1]$$

Conociendo el número de vueltas por segundo: $n = \frac{1}{T}$, la

velocidad angular se expresa por:

$$\omega = 2\,\pi\,n \qquad [2]$$

La Tierra gira sobre su eje con movimiento uniforme; todos los meridianos giran un ángulo de 360° en un día sideral, lo que equivale a una velocidad angular de 15° por hora, o 15″ por segundo de tiempo sidéreo.

$$\omega = \frac{15''}{\text{seg.}} = \frac{15}{206.265}\,\frac{\text{radian}}{\text{segundo}}$$

3.— *Vector velocidad angular.*

Se representa la velocidad angular por un vector cuya dirección es la del eje de rotación y cuyo sentido es el del avance de un tirabuzón que se hace dar vuelta para el mismo lado que gira el cuerpo (igual sentido de rotación) (1).

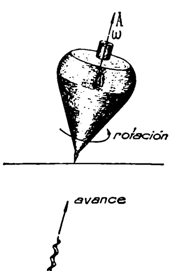


Fig. 216.—*Vector velocidad angular - Convención de signos.*

Desde el extremo de este vector se ven girar los puntos del cuerpo en rotación en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

La figura 216 representa un trompo bailando. El vector OA representa en una cierta escala a la velocidad angular $\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\pi\,n$; la flecha curvada da el sentido de la rotación.

Debajo, el tirabuzón aclara la regla dada para el sentido del vector.

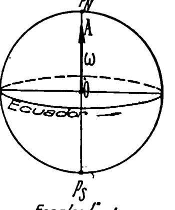


Fig. 217.—*Rotación de la tierra.*

La figura 217 representa la Tierra en rotación; el vector ω, de acuerdo al sentido adoptado, se dirige hacia el polo Norte.

(1) El sentido positivo del vector ω es, en principio, arbitrario; pero el que se adopta aquí concuerda con el que se estableció para el momento de las cuplas (§ 34).

El módulo $|\omega| = \dfrac{15''}{\text{seg}}$ se ha representado tomando un segmento OA de 15 mm, o sea con la escala [1]: $\dfrac{1''}{\text{seg}} = 1\ \text{mm}$

Cuando un cuerpo está sometido a dos rotaciones simultáneas, se puede demostrar que la velocidad angular de la rotación resultante de ambas se obtiene, *en cada instante*, aplicando la regla del paralelogramo a los vectores representativos de las velocidades angulares de los movimientos componentes (fig. 218a).

Análogamente una velocidad angular se puede descomponer en otras dos de direcciones dadas (fig. 218b).

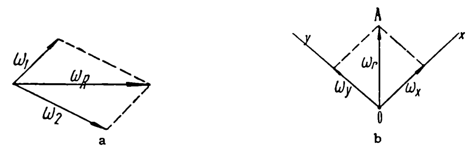


Fig 218 a.—*Composición de rotaciones.* b.—*Descomposición de una rotación.*

4.— *Velocidad de cada punto.*

Para todos los puntos del cuerpo en rotación la velocidad angular es la misma, pero cada uno tiene su velocidad de traslación propia, que depende de su distancia al eje.

En la figura 215 los puntos M, N y P describen en igual tiempo circunferencias de radios $OM = r_1$, $O_1N = r_2$ y $OP = r_3$.

Sus velocidades están representadas por vectores, v_1, v_2 y v_3, tangentes a las circunferencias correspondientes y cuyos módulos serán:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} = \frac{2\pi}{T} r_1 = \omega r_1$$

$$v_2 = \omega r_2 \ , \ v_3 = \omega r_3$$

En general:

$$v = \omega \cdot r \qquad [3]$$

(1) En rigor ω es de 15'' por segundo de día sidéreo pero puede tomarse con suficiente aproximación el mismo valor referido al segundo solar medio (ver §41).

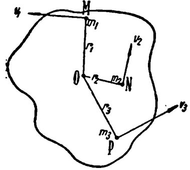


Fig. 219.—$I = \Sigma mr^2$

§ 96.— **Energía cinética de un cuerpo en rotación.**

1.—Para determinar la energía cinética de un cuerpo en rotación hay que hacer la suma de las energías cinéticas de sus partículas. Llamando m_1, m_2, m_3, a las masas de elementos del cuerpo y v_1, v_2, v_3, las respectivas velocidades se tiene (figura 219).

$$E'_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \ldots .$$

o sea simbolizando con $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ a la suma del segundo miembro:

$$E'_c = \Sigma \frac{1}{2} m v^2 \qquad [4]$$

y teniendo en cuenta la fórmula [3]

$$E'_c = \Sigma \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Sacando en todos los términos de la suma el factor común $\frac{1}{2} \omega^2$ resulta:

$$E'_c = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2 \qquad [5]$$

2.—*Momento de inercia.*

A la suma de los productos de los elementos de masa por los cuadrados de las distancias al eje, representada por el símbolo: $\Sigma m r^2$, se la llama **momento de inercia** del cuerpo.

El momento de inercia, como las distancias r, depende del eje de rotación elegido; por eso se dice: m o m e n t o d e i n e r c i a d e l c u e r p o c o n r e s p e c t o a t a l o c u a l e j e.

Siendo suma de productos de masas por distancias al cuadrado, el momento de inercia se mide en **g r a m o - c e n t í m e t r o c u a d r a d o** (g. cm^2).

Simbolizaremos al momento de inercia con la letra I; su función en los movimientos de rotación es análoga a la de la masa en las traslaciones.

La energía cinética del cuerpo en rotación se puede expresar en virtud de la fórmula [5], como sigue:

$$E'_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad [6]$$

Esta fórmula es análoga a $E_c = \frac{1}{2} M v^2$ que representa la energía cinética de un cuerpo de masa M trasladándose con velocidad v (§ 71).

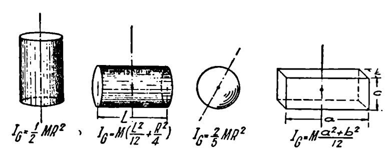


Fig. 220.—*Momentos de inercia baricéntricos.*

Los valores de los momentos de inercia de cuerpos homogéneos de forma geométrica se pueden calcular con ayuda de las matemáticas. La figura 220 indica los valores correspondientes a ejes que pasan por el baricentro (centro de masa) G de algunos cuerpos cuya masa se representa por M.

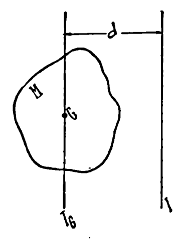


Fig. 221.—*Regla de Steiner.*

3.—*Regla de Steiner.*

En base a la definición establecida, se demuestra que el momento de inercia I de un cuerpo respecto a un eje cualquiera es igual a la suma del momento de inercia I_0 respecto al eje paralelo que pasa por el centro de gravedad G con el producto de la masa *M* del cuerpo por el cuadrado de la distancia *d* entre los ejes (fig. 221).

$$I = I_G + Md^2 \qquad [7]$$

Esta propiedad se conoce con el nombre de **regla de Steiner.**

§ 97.—**Movimiento de rotación uniformemente acelerado.**

1.—Imaginemos un volante (figura 222) en cuyo eje cilíndrico de radio R = OA está arrollado un hilo del que pende un peso p.

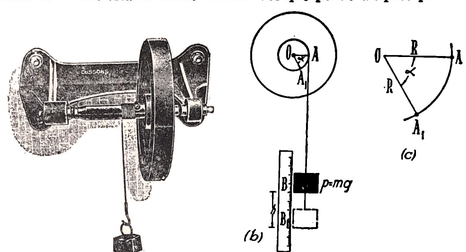


Fig. 222.—*Movimiento de rotación acelerado, en un volante.*

Este hilo que no puede resbalar por tener un extremo fijo al eje, trasmite al volante la fuerza vertical p aplicada en el punto A (figura 222 b).

Dicha fuerza tiene un momento M = p.R con respecto al eje O, el cual no estando equilibrado, hará girar al volante.

En un cierto tiempo t, el peso p pasará de la posición B a la posición B_1 descendiendo con movimiento uniformemente acelerado vertical. Entretanto el punto A del volante pasará a la posición A_1, tal que $AA_1 = BB_1$.

Llamando a a la aceleración de caída de p se tiene $BB_1 = \frac{1}{2} a t^2$.

El ángulo α girado por el radio OA en el mismo tiempo será:

$$\alpha = \frac{AA_1}{R} = \frac{BB_1}{R} = \frac{1}{2} \frac{a}{R} t^2.$$

Como el movimiento de caída de p no es uniforme, tampoco lo será el movimiento de A.

La velocidad angular media en el intervalo t considerado será:

$$\omega_m = \frac{\alpha}{t}$$

La velocidad angular instantánea habrá que definirla como el valor que toma la relación de pequeños incrementos Δα de ángulo con los respectivos Δt cuando éstos se hacen infinitamente pequeños.

Entre las velocidades angulares y las tangenciales de traslación de A, se cumple siempre la relación:

$$\omega = \frac{v}{R} \qquad [8]$$

2.—*Aceleración angular.*

Como el movimiento de A, igual que el de B, es uniformemente acelerado, la velocidad adquirida v será proporcional al tiempo y habrá una aceleración constante $a = \frac{v}{t}$

Siendo constante este valor, también lo será su cociente por el radio:

$$\varphi = \frac{a}{R} = \frac{v}{R.t} = \frac{\omega}{t} \qquad [9]$$

Este valor es la *aceleración angular del movimiento de rotación.* En este caso tiene valor constante y representa el aumento de velocidad angular en la unidad de tiempo.

3.—*Ecuación del movimiento.*

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas podemos establecer la ecuación fundamental del movimiento. En efecto, el trabajo de la fuerza *f* transmitida por el hilo es:

$$L = f \cdot \frac{1}{2} a\, t^2 = \frac{1}{2} f \cdot R\, \varphi\, t^2$$

y como fR = M, valor constante del momento aplicado:

$$L = \frac{1}{2} M\, \varphi\, t^2$$

Prescindiendo de la pesa y refiriéndonos sólo a la fuerza *f* aplicada por el hilo al volante, diremos que ese trabajo es igual a la energía cinética adquirida por éste, la que si llamamos I a su momento de inercia es:

$$E'_c = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} I\, \varphi^2\, t^2$$

y por tanto:

$$\frac{1}{2} M\, \varphi\, t^2 = \frac{1}{2} I\, \varphi^2\, t^2$$

de donde, simplificando:

$$M = I\, \varphi \qquad [10]$$

Esta es la ecuación fundamental de las rotaciones, análoga a la de Newton para las traslaciones:

$$F = m\,a$$

La fuerza F es reemplazada por el momento M; la masa m por el momento de inercia I y la aceleración a por la aceleración angular φ.

§ 98.—**Péndulo físico o compuesto.**

1.—Un cuerpo cualquiera suspendido de un eje O está en equilibrio cuando la vertical del centro de gravedad G pasa por él. (Figura 223).

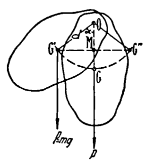


Fig. 223. — *Péndulo físico.*

Separado de esta posición el peso P aplicado en G' origina un momento con respecto a O; el valor de este momento es:

$$M = P \times G'M = mg\ d.\ \text{sen}\ \alpha \qquad [11]$$

El cuerpo vuelve a la posición de equilibrio, pero a causa de la energía cinética adquirida no se detiene en ella sino que sigue hasta que el centro de gravedad llega a G", posición simétrica de G', transformando toda su energía cinética en potencial.

El movimiento sigue indefinidamente si no hay roces; cada punto realiza un movimiento análogo al de un péndulo simple.

Si la amplitud es pequeña el movimiento del punto G puede asimilarse a un movimiento restilíneo armónico sobre la recta G'G".

Llamando a la elongación: $x = \overline{G'M}$, el período del movimiento es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{a}} \qquad \text{(Ver § 90)}$$

El valor de la elongación es:

$$x = \overline{G'M} = d\ \text{sen}\ \alpha$$

En cuanto a la aceleración correspondiente a la podemos sacar en base al cálculo de la aceleración angular φ del punto G'.

De la fórmula [10] se deduce:

$$\varphi = \frac{M}{I}$$

siendo I el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación y M el momento aplicado.

Por tanto: $\varphi = \dfrac{mg\ d\ \text{sen}\ \alpha}{I}$

y la aceleración a es:

$$a = \varphi . d = \frac{mg\ d^2 \text{ sen } \alpha}{I}$$

El período de oscilación resulta así:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d \cdot \text{sen } \alpha}{\frac{mg\ d^2 \text{ sen } \alpha}{I}}}$$

y simplificando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ d}} \qquad [12]$$

2.—*Péndulo simple sincrónico.* — Hemos visto en el (§ 85) que se llama péndulo simple sincrónico de un péndulo físico dado a aquel que oscila con igual período que éste.

La condición a cumplir será por tanto:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ d}}$$

o también simplificando:

$$l = \frac{I}{md} \qquad [13]$$

3.—*Péndulo reversible.*

Una barra con dos cuchillas O_1 y O_2 y dos masas M_1 y M_2 movibles constituye un péndulo reversible..

Desplazando convenientemente las masas movibles se llega a conseguir que suspendido el péndulo tanto de O_1 como de O_2 oscile con el mismo período T

Se demuestra que en este caso la distancia $\overline{O_1 O_2}$ es igual a la longitud del péndulo simple sincrónico:

$$O_1 O_2 = l$$

Es útil para determinar con exactitud el valor de g, que se calcula así con la fórmula del péndulo simple:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l = \frac{4\pi^2}{T^2} \overline{O_1 O_2}$$

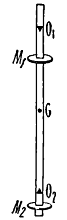


Fig. 224. — *Péndulo reversible de Kater.*

§ 99. — Impulso de rotación.

Si en el caso de la figura 222, después de desarrollarse el hilo la pesa p cae al suelo, el volante seguirá moviéndose con movimiento unifor-

me, indefinidamente, si no hay resistencias de roce. En la práctica aunque éstas se reduzcan al mínimo empleando cojinetes con bolillas (§ 81), el volante se detiene después de un tiempo más o menos largo, porque su energía cinética se transforma en trabajo de las fuerzas de frotamiento, hasta anularse.

El caso es análogo al de un cuerpo lanzado sobre un plano horizontal, que teóricamente debería seguir en línea recta y conservar su velocidad. Mientras los roces no actúan en forma sensible el cuerpo conserva su impulso o cantidad de movimiento *mv* (§ 62).

En las rotaciones, la magnitud correspondiente es el vector impulso de rotación, de dirección y sentido coincidentes con los de la velocidad angular ω y cuyo módulo vale:

$$J = I \omega \qquad [14]$$

Los cuerpos en rotación también mantienen, teóricamente, constante el valor del vector impulso mientras no actúan acciones externas sobre ellos.

Algunos ejemplos interesantes son brindados por cuerpos vivientes que voluntariamente pueden cambiar la distribución de sus masas y, por lo tanto, variar su momento de inercia respecto al eje de rotación.

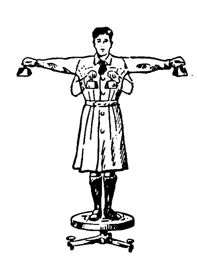


Fig. 225.—*Al abrir los brazos, disminuye la velocidad angular porque aumenta el momento de inercia. Se conserva el impulso.*

Una persona colocada en un taburete de piano con una pesa en cada mano, a la que se hace girar dándole un cierto impulso de rotación, puede cambiar su velocidad angular.

Para esto le basta con separar o juntar los brazos (figura 225).

Siendo $I_1 < I_2$, debe tenerse $\omega_1 > \omega_2$, ya que la conservación del impulso exige que:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \qquad [15]$$

En la intuición instintiva de esta propiedad están el secreto de los saltos mortales de los acróbatas y el arte de caer parados que se atribuye a los gatos.

Variando adecuadamente el valor de I por contracción y extensión de los miembros se arregla ω en forma de tocar el suelo con los pies.

§ 100. — Ejes libres. Estabilidad en la rotación.

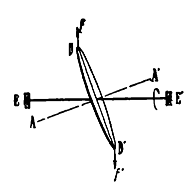


Fig. 226.—*Efecto de la rotación alrededor de un eje cualquiera.*

Imaginemos un volante DD' girando alrededor del eje EE' (figura 226), distinto de su eje de simetría AA'.

En los puntos D y D' se aplican fuerzas centrífugas que tienden a llevar al eje AA' del volante a coincidir con el EE'.

Si el cuerpo pudiera girar libremente alrededor de *O* cambiaría de posición en forma tal que los efectos de la fuerza centrífuga sobre todas sus partículas se equilibrasen.

Un eje que cumple esta condición es un *eje libre*.

La figura 227 muestra un cilindro *girando* alrededor de dos ejes libres; siendo ambos ejes de simetría de masas lo son de las fuerzas centrífugas.

De los dos ejes libres indicados, el segundo tiene mayor grado de estabilidad. *Bastaría* hacer girar el cilindro en la primera posición (eje libre inestable), para ver que a la menor desviación se desplazaría hasta tomar la segunda posición.

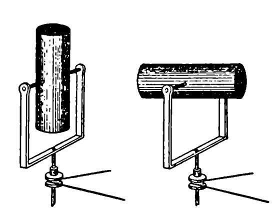


Fig. 227.—*Ejes libres. - Posiciones de equilibrio.*

§ 101. — Giróscopo.

1. —El giróscopo es un aparato ideado por Foucault con objeto de probar la existencia del movimiento de rotación de la Tierra.

Consta de un volante que gira alrededor de su eje de simetría que es un eje libre estable.

Los extremos del eje apoyan en dos cavidades de un soporte en forma de aro circular.



Fig. 228. — *Giróscopo con tres grados de libertad.*

En el giróscopo de Foucault, una doble suspensión sobre pivotes y aros (suspensión cardánica) permite girar el soporte en todas direcciones sin ejercer ningún momento sobre el eje de rotación (figura 228).

Por medio de un hilo arrollado del que se tira en forma adecuada, se comunica una velocidad angular ω al volante. Siendo I su momento de inercia respecto al eje, su impulso de rotación es:

$$J = I \omega$$

La figura 229 representa ambos vectores sobre un giróscopo esquemático.

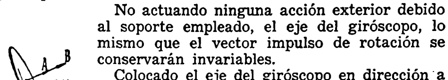


Fig. 229.—*Giróscopo esquemático.*

No actuando ninguna acción exterior debido al soporte empleado, el eje del giróscopo, lo mismo que el vector impulso de rotación se conservarán invariables.

Colocado el eje del giróscopo en dirección a una estrella fija (cosa que se observaba con un anteojo ligado al soporte y de eje óptico paralelo al de rotación del giróscopo), Foucault comprobaba que, después de un tiempo, el eje seguía dirigido a la estrella, pareciendo, en cambio, moverse respecto al soporte.

Dicho movimiento aparente del eje, comprobaba que la Tierra se había desplazado arrastrando al soporte. El valor, la dirección y el sentido del desplazamiento permitían establecer que era debido a la rotación alrededor del eje terrestre.

Los desplazamientos medidos por Foucault fueron pequeños porque su giróscopo sólo andaba 40 minutos, pero posteriormente, empleando giróscopos en que el volante es el rotor de un motor eléctrico, se tuvieron grandes desplazamientos y comprobaciones definitivas.

2.—Las aplicaciones del giróscopo son hoy muy numerosas e interesantes, pero todas ellas basadas en los fenómenos de inercia que presenta.

En general, la dirección del eje y el impulso se conservan invariables, pero al actuar fuerzas exteriores, para modificarlos, se producen reacciones de inercia, que se aprovechan para obtener los más curiosos efectos.

Los giróscopos tienen formas diversas, pero siempre están constituídos por un cuerpo de revolución girando alrededor de su eje con gran velocidad angular ω.

Un trompo girando rápidamente presenta fenómenos de inercia como un giróscopo.

3.— *Tendencia al paralelismo.*

Sea G el baricentro de un giróscopo cuya velocidad angular ω se representa por el vector GA, y supongamos que su eje está apoyado en O sobre un soporte (figura 230).

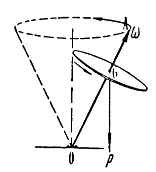


Fig. 230. — *Precesión en el giróscopo pesado.*

El peso P vertical y aplicado en G produce un momento que haría girar al cuerpo alrededor de un eje perpendicular al plano del dibujo, acercando el eje OA a la posición horizontal, si estuviera en reposo.

Pero, estando en movimiento, el giróscopo no hace tal rotación, sino que se mueve sacando su eje OA del plano del dibujo y llevándolo hacia atrás, tratando de ponerlo paralelo al vector representativo de la nueva rotación que se le quiere imponer. Inicia así un movimiento cónico del eje llamado precesión, eludiendo aparentemente la acción de la gravedad. Foucault estableció esta propiedad con el nombre de principio de la tendencia al paralelismo, enunciándola como sigue:

"S i e l e j e d e u n t o r o e n r o t a c i ó n e s s o l i c i t a d o a g i r a r a l r e d e d o r d e u n a r e c t a, t i e n d e a c o l o c a r s e p a r a l e l a m e n t e a e s t a r e c t a, d e t a l m a n e r a q u e l a s d o s r o t a c i o n e s s e a n d e l m i s m o s e n t i d o".

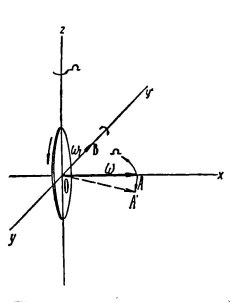


Fig. 231.—*Reacción giroscópica.*

De acuerdo con este enunciado, si (xyz) es una terna de ejes cartesianos cuyo origen es el baricentro de un giróscopo que se mueve con velocidad ω = OA alrededor del eje de las x, una cupla que tratara de hacer pasar su eje a la posición OA' girando alrededor del eje Oy' (velocidad ω_1 = OB), daría como resultado una r o t a c i ó n r e a l Ω a l r e d e d o r d e l e j e O Z, tratando de llevar OA a coincidir con OB (ver figura 231).

Esta reacción giroscópica explica el movimiento de *precesión.*

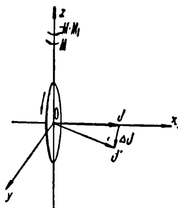


Fig. 232.

4. — *Explicación elemental del fenómeno.*

Si $J = I\omega$ representa el impulso del giróscopo, al pasar su eje de la posición OJ a la OJ', exige la adición de un vector $\Delta J = JJ'$ paralelo a OZ y que implica una rotación alrededor de este eje provocada por un momento:

$$M = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{\Delta\ (I.\omega)}{\Delta t} = I\ \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

o sea:

$$M = I.\varphi \qquad [16]$$

Δt es el tiempo en que se produce el incremento $\Delta J = JJ'$ de impulso y φ la aceleración angular media respectiva.

El giróscopo produce una reacción igual y contraria de inercia que es el momento giroscópico: $M_1 = -M = -I\ \varphi$ que hace girar OJ, iniciando la precesión. (fig. 232).

§ 101 a. — Aplicaciones del giróscopo.

Se emplea el giróscopo utilizando su reacción de inercia ante las acciones exteriores, en diversos aparatos con los que se mantiene fija la dirección de un movimiento.

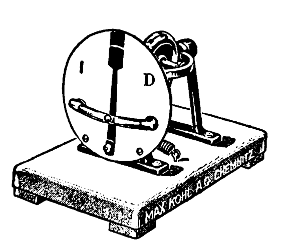


Fig. 233.—*Modelo de indicador giroscópico de virajes, para avión.*

Tal sucede con el dispositivo de dirección de torpedos en que el giróscopo acciona timones mediante aire comprimido y mantiene el azimut de partida. Otro tanto hace el piloto mecánico para aviones que permite descansar al verdadero piloto y guía en plena obscuridad.

Se fabrican diversos aparatos con giróscopos para el vuelo a ciegas y estabilizadores para combatir el efecto del oleaje en los navíos.

Se han construído también ferrocarriles monorrieles que realizan un equilibrio curioso ayudados por un giróscopo; y el

efecto giroscópico se aplica en los proyectiles para mantener la dirección de su eje.

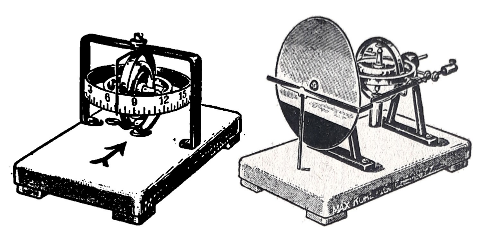


Fig. 234.—*Modelo de giróscopo indicador de ruta.*

Fig. 235.—*Modelo de horizonte giroscópico para avión.*

Pero una de las más útiles aplicaciones a la navegación corresponde al giro-compás, constituído por un giróscopo sos-

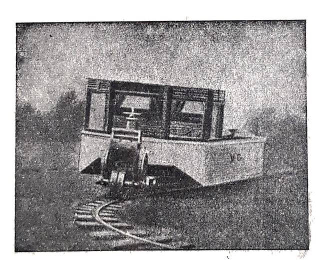


Fig. 236.—*Monorriel, cuyo equilibrio se mantiene con un giróscopo.*

tenido sobre flotadores con su eje horizontal, en una caja especial, (fig. 238).

El giróscopo propiamente dicho es el rotor de un motor eléctrico.

Después de marchar un tiempo suficiente, su eje se coloca

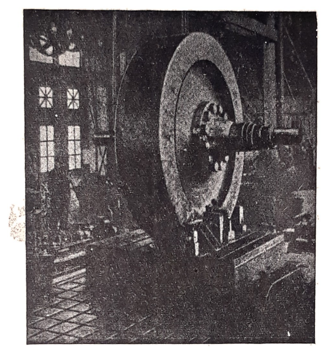


Fig. 237.—*Rotor de un giróscopo estabilizador para navíos.*

en el meridiano geográfico del lugar, manteniéndose horizontal. Toma, por tanto, la dirección de la meridiana geográfica del lugar, marcando el norte verdadero. No es influenciado por las masas de hierro, ni por las variaciones de declinación, como pasa con las brújulas magnéticas; es de uso corriente en los buques de guerra.

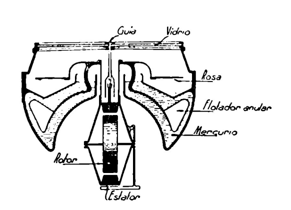


Fig. 238.—*Esquema de brújula giroscópica o giro-compás.*

§ 102. — **Péndulo de Foucault.**

Antes de construir el giróscopo, Foucault, hizo en París, una experiencia famosa, utilizando el péndulo para probar la existencia de la rotación de la Tierra. Usó un péndulo de gran masa y gran longitud que colgó en la cúpula del Panteón, en 1851.

El péndulo tiene la propiedad de conservar invariable la posición de su plano de oscilación cuando es abandonado a sí mismo. Esta propiedad está vinculada con la conservación del vector impulso de rotación en el giróscopo.

Un péndulo colocado en un polo terrestre (figura 239), al conservar invariable la posición de su plano de oscilación parecerá girar con respecto a su soporte MNPQ ligado al suelo. En realidad será éste el que gira acompañando a la tierra.

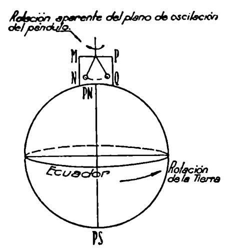


Fig. 239.—*Rotación aparente del plano de oscilación de un péndulo en el polo.*

Ambas rotaciones tienen sentidos opuestos, como indica la figura.

En esta posición, el plano de oscilación del péndulo tardará un día sideral en dar una vuelta, en su movimiento aparente.

En cambio, en un lugar de latitud φ (figura 240) tardará un tiempo mayor, pues habrá que tener en cuenta la componente de la rotación terrestre en la dirección de la vertical del punto de latitud φ, en vez de su valor total $\omega_T = OA$. El valor de esta componente es, de acuerdo a la figura 240.

$$\omega_1 = OB = \omega_T \text{ sen } \varphi \qquad [17]$$

Pero $\omega_T = \dfrac{2\pi}{24 \text{ horas}}$ y llamando T_1 al tiempo de una rotación aparente en el lugar de latitud φ, se tiene $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$

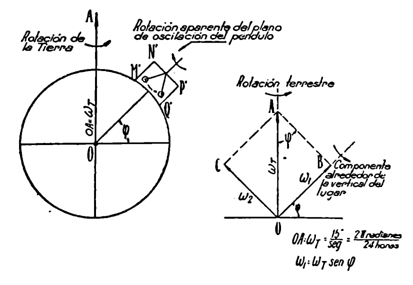


Fig. 240.—*Rotación aparente del plano de oscilación de un péndulo en un lugar de latitud* φ

Reemplazando en la fórmula [17]:

$$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{24 \text{ horas}} \text{ sen } \varphi$$

y despejando:

$$T_1 = \frac{24 \text{ horas}}{\text{sen } \varphi}$$

En un punto del ecuador terrestre donde $\varphi = 0$ y, por tanto, sen $\varphi = 0$ resulta $T = \infty$, es decir, que no da resultado la experiencia de Foucault.

A continuación indicamos en horas siderales los tiempos T_1 en que el plano de oscilación del péndulo daría una vuelta completa para diversas latitudes:

Latitud φ:	90°	60°	45°	34°36′ (Buenos Aires)	30°	0°
Tiempos T_1:	24^h	27^h42^m6	33^h56^m4	42^h15^m9	48^h	∞

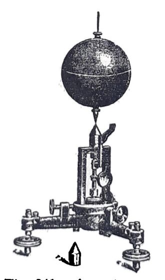


Fig. 241.—*Aparato para comprobar la rotación de la tierra por la rotación del plano de oscilación del péndulo.*

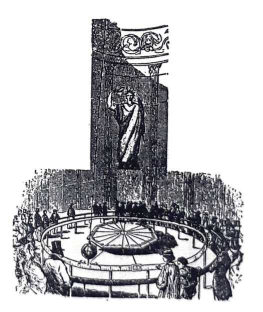


Fig. 242.—*Experiencia histórica de Foucault.*

La figura 241 muestra un dispositivo práctico con el que se verifica la experiencia de Foucault, que actualmente reviste el carácter de experiencia de curso.

La rotación aparente del plano de oscilación se constata por el desplazamiento de un rayo de luz sobre una escala; este rayo es reflejado por un espejito que sigue el movimiento del extremo del péndulo, donde hay un imán que atrae un trozo de hierro móvil con el espejo.

En la experiencia histórica de Foucault el péndulo marcaba su posición sobre un círculo de arena que tocaba su extremo inferior (figura 242).

§ 103. — **Efectos giroscópicos en la tierra.**

1.— *Precesión.*

La tierra girando sobre su eje presenta fenómenos de inercia como un giróscopo.

Debido a su ensanchamiento ecuatorial y al hecho de que su eje no es perpendicular al plano de la eclíptica, las fuerzas de atracción que el Sol ejerce sobre ella dan lugar a un momento que tiende a cambiar la posición de aquél, originando un movimiento de *precesión.*

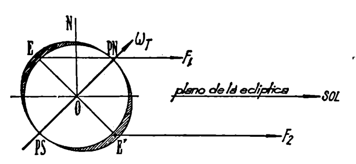


Fig. 243.—*Cupla que origina la precesión uel eje terrestre.*

La fig. 243 muestra una sección de la tierra según un meridiano que pasa por el centro del Sol S, cortando el plano de la eclíptica en OS y al ecuador terrestre en EE'. El ángulo de ambos planos es la oblicuidad de la eclíptica y vale 23° 27' aproximadamente.

Las partes rayadas muestran el ensanchamiento ecuatorial; el círculo central corresponde a una esfera con radio igual al semi-eje polar del elipsoide terrestre,

La fuerza F_2 que actúa en la zona rayada de E' es mayor que la F_1 correspondiente a E en virtud de la ley de gravitación (§ 93), por ser menor la distancia de la primera al Sol.

Teniendo en cuenta que la atracción solar de la parte esférica se aplica en O, y que las fuerzas F_1 y F_2 pueden trasladarse a dicho punto agregando dos cuplas de brazo igual a sus distancias a O (§ 32 a), resulta, en definitiva, que la acción del Sol sobre la tierra, además de la atracción aplicada

en su centro, comporta una cupla cuyo momento tiene el signo del de la fuerza mayor F_2 respecto a O. Análogo efecto puede señalarse en la acción de la luna y aún en la de los otros planetas.

La cupla resultante tenderá a desplazar el eje terrestre llevándolo a coincidir con la perpendicular ON al plano de la eclíptica.

De acuerdo a las propiedades del giróscopo, la tierra reaccionará moviendo su eje perpendicularmente al plano del dibujo y hacia adelante, para llevarlo hacia el eje de la rotación que la cupla tiende a producir.

Esta acción continuada da lugar a que el eje OP describa un movimiento cónico alrededor de la recta ON.

Este movimiento de precesión consiste, como hemos visto (§ 101 - 3), en una rotación alrededor del eje de OZ con velocidad angular Ω (fig. 230 y 231).

Componiendo con la regla del paralelogramo las dos rotaciones ω_T y Ω se puede determinar, para cada instante, el valor y la posición del vector ω_R resultante.

Este vector cambia de posición constantemente, pero conserva invariable su ángulo con OZ.

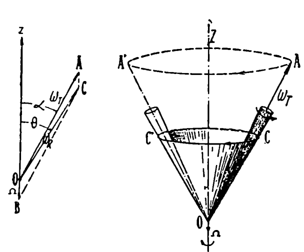


Fig. 244.—*Movimiento en precesión de la tierra.*

En la fig. 244 están representados los vectores ω_T y Ω en OA y OB, con los sentidos que les corresponden en el caso de la tierra.

Al cambiar el plano del vector OA por la precesión, siempre conserva invariable su ángulo α con *OZ* y otro tanto le pasará al vector resultante OC. Las posiciones de éste quedarán sobre una superficie cónica COC' de ángulo ZOC $= \theta$.

El eje terrestre formará en cada instante el ángulo COA $= \theta - \alpha$ con el eje instantáneo OC. Sus posiciones sucesivas pueden encontrarse imaginando un pequeño cono de ángulo $(\theta - \alpha)$ rodando interiormente apoyado en el COC'.

El eje OA de este pequeño cono (eje de la tierra) des-

cribe la superficie cónica AOA' en el movimiento de precesión regular.

La recta, intersección del ecuador con la eclíptica, llamada línea de los equinoccios, cambia de posición constantemente. Los equinoccios o puntos de intersección de esa línea con la esfera celeste se mueven en el sentido llamado retrógrado, recorriendo en cada año 50"2, de arco de ecuador. Esta es la llamada p r e c e s i ó n o r e t r o g r a d a c i ó n d e l o s e q u i n o c c i o s, descubierta por Hiparco hace más de 2000 años y explicada ahora en base a los fenómenos giroscópicos.

2. — *Nutación.*

La cupla que tiende a mover el eje de la tierra sufre variaciones periódicas que hacen que en realidad éste no describa una superficie cónica, sino que sufra desplazamientos alrededor de su posición media sobre el cono de precesión, con período $18\frac{2}{3}$ año.

Estos desplazamientos abarcan 14" en la dirección del movimiento cónico de precesión y 18" en dirección perpendicular. La figura 245 indica la línea que describe un punto del eje por efecto de la precesión y la nutación combinadas. (Estas posiciones quedan sobre la superficie esférica de centro O y radio OA).

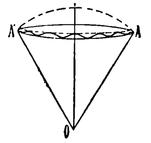


Fig. 245.—*Nutación del eje terrestre.*

3.—En rigor, el problema se plantea en la siguiente forma: las atracciones del sol y de la luna sobre el ensanchamiento ecuatorial terrestre, producen un desplazamiento lento del ecuador, con respecto al plano de la eclíptica.

La expresión matemática que permite calcular las posiciones relativas de ambos planos en un instante dado, está formada por dos series de términos: unos que son funciones crecientes del tiempo, y otros, que son funciones periódicas, cuyos argumentos dependen de las posiciones relativas del sol y de la luna.

Los términos de la primera serie, constituyen la *precesión propiamente dicha* y los de la segunda representan la *nutación.*

Por otra parte, la acción de los planetas sobre el sol y la tierra, origina un desplazamiento muy lento de la eclíptica respecto a las estrellas fijas.

CAPÍTULO IX

HIDROSTÁTICA

§ 104. — **Definición de flúido.** — En general, dividimos los cuerpos de la naturaleza en sólidos y flúidos. Como no siempre es posible una clasificación estricta, pues hay cuerpos cuya inclusión en uno u otro grupo es dudosa, nos limitaremos ahora a considerar los *flúidos ideales*.

Flúidos son los líquidos y los gases. Ambos se caracterizan por carecer de forma propia, y por lo tanto, adoptar la del recipiente que los contiene.

Pero, los líquidos tienen *volumen* definido, mientras que los gases ocupan íntegramente el volumen del recipiente en que están colocados.

Tanto los líquidos como los gases ideales se caracterizan por la ausencia de resistencias al deslizamiento de unas partes con respecto a las otras.

Definiremos, pues como **flúido ideal**, al que no requiere fuerzas para todos aquellos cambios de forma que no modifiquen su volumen.

Para el *líquido ideal* podemos agregar la condición de que sea absolutamente incompresible.

Los flúidos reales requieren la aplicación de fuerzas para producir cambios de forma, o sea deslizamientos de unas partes sobre otras, pero para velocidades muy pequeñas, cumplen con suficiente aproximación las condiciones establecidas para los líquidos ideales.

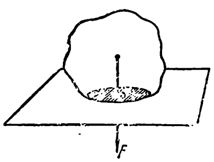


Fig. 246.—*Presión es la fuerza por unidad de superficie.*

§ 105. — **Fuerza y presión.** — Hemos estudiado ya muchos casos en que unos cuerpos ejercen acciones sobre otros. En algunos de ellos esa acción consiste en una fuerza que actúa sobre una superficie. Por ejemplo, en la figura 246, la fuerza

F que ejerce el cuerpo, actúa sobre la superficie S de apoyo, en la que suponemos que está uniformemente distribuída.

Se llama presión a la fuerza que actúa por unidad de superficie.

$$p = \frac{F}{S} \qquad [1]$$

Distinguiremos muy cuidadosamente el empleo de estos dos términos que corresponden a conceptos bien distintos: la fuerza actúa sobre cualquier superficie, la presión es siempre la fuerza por unidad de superficie.

Así por ejemplo: si una fuerza de 8 Kgr actúa uniformemente distribuída sobre una superficie de 20 cm², la presión es:

$$p = \frac{8 \text{ Kgr}}{20 \text{ cm}^2} = 0{,}4 \frac{\text{Kgr}}{\text{cm}^2} \qquad [2]$$

Si se dan la presión y la superficie se calculará la fuerza total por la fórmula

$$F = p . s \qquad [3]$$

§ 106. — **Unidades de presión.** — En el sistema *métrico* o *técnico* en que la unidad de fuerza es el kilogramo y la de superficie el metro cuadrado, la unidad de presión es:

$$[p] = \frac{\text{Kgr}}{\text{m}^2} \qquad [4]$$

Se usa en la práctica, muy corrientemente, el kilogramo por centímetro cuadrado:

$$[p] = \frac{\text{Kgr}}{\text{cm}^2} \qquad [5]$$

y en las aplicaciones técnicas la *atmósfera*, igual a 1,033 Kgr/cm² cuyo valor justificaremos al estudiar la presión atmosférica.

En el sistema c. g. s., la unidad es:

$$[p] = \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \qquad [6]$$

Esta unidad se denomina *baria*.

En unidades inglesas se utiliza la libra por pulgada cuadrada, cuya equivalencia es:

$$1 \frac{\text{libra}}{\text{pulg}^2} = 0.0675 \frac{\text{Kgr}}{\text{cm}^2} \qquad [7]$$

La Oficina Meteorológica Británica llama "bar" a la unidad de presión igual a un millón de $\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$ o Megabaria.

§ 107.— **Presión en un punto de una masa líquida.** — Consideremos un recipiente (fig. 247) conteniendo una cierta cantidad de líquido en equilibrio. Por lo que hemos dicho al definir los flúidos, ese líquido se podrá derramar con extrema facilidad. Imaginemos una superficie de separación *AB* entre dos porciones de la masa líquida. Como el conjunto está sometido a la acción de la gravedad, si suprimiéramos la porción I, sería necesario aplicar sobre la superficie *AB* fuerzas que reemplazaran a las que esa porción ejerce sobre la superficie de separación, para que no se altere el equilibrio de la porción II, y recíprocamente, suprimiendo la porción II debemos reemplazar su acción sobre AB por fuerzas que mantengan en equilibrio la porción restante.

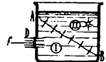


Fig. 247. — *Presiones en un líquido.*

Ahora bien, para que no haya deslizamiento de las partículas líquidas, esas fuerzas deben ser normales a la superficie de separación *AB*. Una fuerza oblicua daría una componente paralela a dicha superficie, cuyo efecto sería un desplazamiento del líquido. A cada punto corresponderá un valor bien determinado de la presión y, cualquiera que sea la orientación del respectivo elemento de la superficie considerada, siempre actuará sobre él una presión normal. Se demuestra y la experiencia comprueba que en cada punto la presión es la misma para todas las orientaciones posibles del elemento de superficie.

Llamaremos pues **presión en un punto** de una masa líquida, a la fuerza que actúe por unidad de área, normalmente a un elemento cualquiera de superficie colocado en ese punto, y suficientemente pequeño como para que se pueda considerar uniforme la presión en toda su extensión.

Del mismo modo, si quisiéramos retirar un elemento de la superficie de la vasija en que el líquido está contenido, tal como el D, para que no se derrame debemos aplicar de afuera hacia

adentro una fuerza igual y contraria a la que el líquido ejerce sobre la pared normalmente a su superficie. La hidrostática se propone calcular la distribución de las presiones en el seno de la masa líquida en equilibrio y sobre las paredes del recipiente.

§ 108. — **Teorema general de la hidrostática.** — 1) En general podemos decir que las presiones en los distintos puntos del líquido en equilibrio varían con sus posiciones dentro de la masa líquida.

El teorema general de la hidrostática da la ley de variación y se enuncia así:

La diferencia de presión entre dos puntos de una masa líquida en equilibrio, es igual al producto del peso específico del líquido por la diferencia de nivel entre los mismos.

Fig. 248.

De acuerdo con este enunciado, dados dos puntos *A* y *B* cuya diferencia de nivel es *h* en un flúido de peso específico ρ; si llamamos p_A y p_B a las respectivas presiones, se tiene (fig. 248).

$$p_B - p_A = h \cdot \rho \qquad [8]$$

2) *Demostración elemental del teorema.*

Consideremos, de acuerdo a la figura 249, dentro de una masa líquida, una porción en forma de cilindro recto de altura h y sección S. Sean A y B las bases del cilindro y ρ el peso específico del flúido.

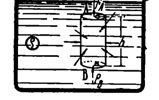


Fig. 249.

Este cilindro líquido idealmente separado del resto, permanece en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que sobre él se ejercen perpendicularmente a su superficie.

Para que haya equilibrio, las acciones laterales deben ser dos a dos iguales y contrarias, en todas las direcciones; pero las verticales no.

La fuerza ejercida de abajo hacia arriba en la base B, debe superar a la ejercida de arriba hacia abajo en la base A, y la diferencia de ambas debe ser igual al peso del cilindro de líquido. De otro modo, éste no quedaría en reposo. Debe, por tanto, tenerse:

Fuerza en B menos fuerza en A = peso del cilindro.

O sea, llamando p_B y p_A a las respectivas presiones en A y en B:

$$\text{fuerza en } B = p_B \times S$$
$$\text{„ „ } A = p_A \times S$$

Peso del cilindro = Volumen × peso específico = S × h × ρ
y, por tanto:

$$p_B \cdot S - p_A \cdot S = S \times h \times \rho$$

y dividiendo ordenadamente por S:

$$p_B - p_A = h \cdot \rho$$

En la aplicación de esta fórmula se supone que el peso específico es constante en toda la masa líquida, independientemente de la presión. Esto concuerda con la propiedad atribuída al líquido perfecto de ser incompresible.

Los líquidos reales son, en efecto, muy poco compresibles; el agua disminuye en 0,0005 de su volumen inicial por cada $\frac{\text{Kgr}}{\text{cm}^2}$ de aumento de presión, que, como veremos en las aplicaciones, corresponde a una diferencia de nivel de 10 metros.

3) La demostración anterior del teorema general de la hidrostática es sencilla aunque presenta algunos puntos objetables. Más correcto es el razonamiento siguiente, basado en el principio de los trabajos virtuales (§ 68).

Sea un recipiente lleno de líquido y cerrado en A_1 y A_2 con pistones de secciones S_1 y S_2. Para mantener el equilibrio habrá que aplicar fuerzas f_1 y f_2 tales que:

$$f_1 = p_1 S_1 \qquad [9]$$
$$f_2 = p_2 S_2$$

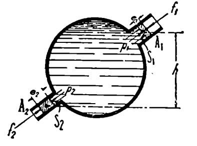


Fig. 250.

Imaginemos un desplazamiento virtual, que no dé lugar a variación de volumen, tal como el corrimiento del émbolo A_1 hacia afuera en un recorrido e_1 y del émbolo A_2 en un recorrido e_2 hacia el interior; se tendrá:

$$S_1 e_1 = S_2 e_2 = \omega \qquad [10]$$

Los trabajos de las fuerzas f_1 y f_2 serán:

$$L_1 = - f_1 e_1 = - p_1 S_1 e_1 \qquad [11]$$
$$L_2 = f_2 e_2 = p_2 S_2 e_2$$

Además en la masa líquida, el único cambio ha consistido en el

pasaje de un volumen ω desde el nivel de A_2 al de A_1. El trabajo del peso $\omega\ \rho$ ha sido:

$$L_p = - \omega \rho h \qquad [12]$$

La suma de los trabajos [11] y [12] es nula en el estado de equilibrio, o sea:

$$- p_1 S_1 e_1 + p_2 S_2 e_2 - \omega \rho h = 0 \qquad [13]$$

y dividiendo por ω, en virtud de la fórmula [10] resulta:

$$p_2 - p_1 = \rho h$$

§ 109. — **Superficies de nivel. Superficie libre.** — Del teorema general de la hidrostática deducimos que a los puntos de un mismo plano horizontal ($h = 0$) corresponden iguales presiones. Recíprocamente decimos que puntos de igual presión en una masa líquida homogénea en equilibrio están en un mismo plano horizontal.

Como todos los puntos de la superficie libre están a la misma presión exterior (la de la atmósfera si el recipiente es abierto), se deduce que dicha superficie es un plano horizontal, estando el líquido en reposo.

§ 110. — **Presiones sobre el fondo y las paredes de los vasos.** — 1) Las presiones ejercidas por un líquido en equilibrio, sobre el fondo y las paredes laterales del vaso en que está contenido, tienen dirección normal a la superficie en que se aplican.

Un razonamiento análogo al hecho para una superficie interna (§ 107), lo comprueba.

El valor de la presión ejercida en cada punto, puede calcularse mediante la aplicación del teorema general de la hidrostática.

Fig. 251.—*Presiones en las paredes de un recipiente.*

Sea un líquido de peso específico ρ, situado en el recipiente de la figura 251.

Suponiendo nula la presión en la superficie del líquido (caso de tener el vaso en el vacío), se tiene, aplicando el teorema general de la hidrostática:

Presión en el fondo:

$$p_A = h \cdot \rho \qquad [14]$$

Presión en los puntos B y C (igual nivel):

$$p_B = p_C = h' \cdot \rho \qquad [15]$$

En realidad, sobre la superficie del líquido actúa la presión atmosférica p_o, teniéndose la relación

$$p_A - p_o = h \cdot \rho$$

Pero, como también actúa sobre el vaso y por la parte exterior, la presión atmosférica, con valor prácticamente igual a p_o, el producto $h \cdot \rho$ representa la fuerza resultante aplicada en cada cm^2 del fondo del vaso y a la que debe resistir éste.

Análoga cosa puede decirse de los valores de las presiones en B y C.

2) *Paradoja hidrostática.* — La presión sobre el fondo depende sólo del peso específico y de la altura de líquido *h*. Si el fondo tiene sección S, el empuje producido (fuerza total), será:

$$F = p \cdot S = h \cdot \rho \cdot S \qquad [16]$$

y también, para un valor dado S sólo dependerá de h y de ρ, siendo independiente de la forma del vaso y de la cantidad de líquido contenido en él.

Esto se comprueba con el aparato de la figura 252, en que se mide la fuerza total, ejercida sobre una misma superficie de fondo por el líquido contenido en vasos de distinta forma.

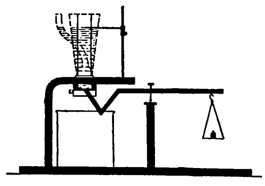


Fig. 252.—*Aparato para comprobar que la presión en el fondo sólo depende del nivel del líquido en el recipiente.*

El hecho paradójico consiste en que los valores obtenidos para la fuerza son iguales, cualquiera sea la masa total de líquido, con tal que alcance en todos los recipientes el mismo nivel, llegando a ser mayor aún que el peso total del líquido contenido.

§ 111. — Presión de abajo hacia arriba. — **En el interior del líquido la presión se ejerce en todos sentidos en cada punto.**

Consideremos en un punto un elemento de superficie horizontal. Sobre él se ejercen verticalmente dos presiones, una de arriba hacia abajo y la otra de abajo hacia arriba, ambas son iguales y se equilibran. Para demostrarlo experimentalmente se emplea el dispositivo indicado en la figura 253.

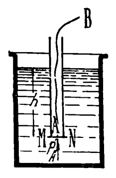


Fig. 253.—*Presión de abajo hacia arriba.*

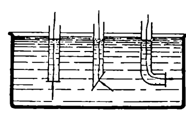
En el interior de un recipiente con agua se introduce un tubo con una tapa liviana MN, de vidrio, sostenida mediante el hilo AB.

Se comprueba que, una vez introducido el tubo, la tapa MN queda adherida por efecto del empuje originado por la presión de abajo hacia arriba p'.

Para probar que esta presión es igual en valor a la de arriba hacia abajo, o sea que $p' = h.\rho$, basta con llenar de agua el tubo. Al llegar al nivel exterior, la tapa se desprende por acción de su peso, al equilibrarse las presiones que actúan sobre ella.

§ 112.— **Comprobaciones experimentales.** — El aparato de la figura 252 comprueba, en realidad, que la presión sólo depende de la altura de la columna líquida.

Con los tubos de la fig. 254 tapados en su parte inferior con un disco de vidrio y sumergidos, se observa que, colocando el mismo liquido en el interior, el disco se desprende cuando el nivel es igual al del exterior. Esto comprueba que la presión es la misma en todas direcciones.


Fig. 254.—*La presion en el seno del liquido actúa en todas direcciones.*

Con el baróscopo de líquidos (fig. 255) se realiza la misma comprobación.

La membrana elástica M recibe la presión que la deforma, y se desnivela el líquido en el tubo en U de la parte

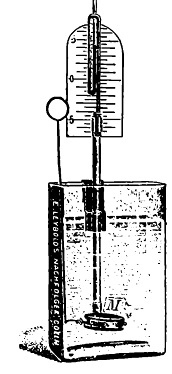


Fig. 255.—*Baróscopo de liquidos.*

superior. Ese desnivel aumenta con la profundidad de M y es independiente de su orientación.

§ 113. — **Vasos comunicantes.** — 1) Un sistema de dos o más recipientes comunicados por su parte inferior, constituye un sistema de vasos comunicantes.

En los vasos comunicantes con un solo líquido, éste toma el mismo nivel en todos los vasos.

Este hecho puede verificarse experimentalmente con un aparato como el que indica la fig. 256. En todos los tubos, de distinta forma, el agua o el líquido vertido toma el mismo nivel. En realidad, los cinco vasos y el tubo de comunicación forman un solo recipiente lleno de líquido. La superficie debe tener el mismo nivel, porque en ella la presión es la misma (la atmosférica p_0), y todos los puntos que están al mismo nivel tienen igual presión.

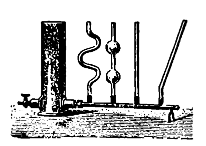


Fig. 256. — *Vasos comunicantes*

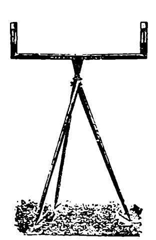


Fig. 257. — *Nivel de agua.*

Como aplicación de los vasos comunicantes mencionaremos el nivel de agua (fig. 257), que se utiliza para tomar visuales horizontales. El funcionamiento de los pozos artesianos se explica también como fenómeno de vasos comunicantes (fig. 258).

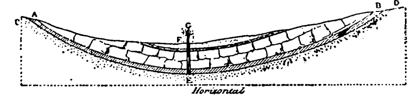


Fig. 258.— *Pozo artesiano.*

2) *Vasos comunicantes con distinto líquido.*—Si en un sistema de dos vasos comunicantes se colocan dos líquidos que no se mezclan y de distinta densidad, alcanzan niveles diferentes.

Se establece una superficie de separación MN en el vaso que contiene al líquido menos denso, como indica la fig. 259.

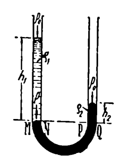


Fig. 259. — *Vasos comunicantes con líquidos diferentes, no miscibles.*

Se puede verificar que las alturas de las columnas líquidas contadas a partir del plano de la superficie MN de separación, son inversamente proporcionales a los pesos específicos ρ_1 y ρ_2 de los líquidos.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad [17]$$

Esta propiedad es consecuencia del teorema general de la hidrostática.

En efecto, para que haya equilibrio, las presiones p y p' ejercidas sobre la superficie MN de arriba hacia abajo y de abajo hacia arriba, deben ser iguales.

La presión p, debida al líquido menos denso, se calcula con el teorema de la hidrostática. Siendo p_0 la presión atmosférica aplicada en la superficie libre, se tiene:

$$p - p_0 = h_1 \cdot \rho_1$$

y, por tanto:

$$p = p_0 + h_1 \cdot \rho_1.$$

En cuanto a la presión p' transmitida por el líquido más denso, es igual a la que actúa al mismo nivel en PQ, sobre el otro tubo. De acuerdo con el teorema de la hidrostática, su valor es:

$$p' = p_0 + h_2 \cdot \rho_2.$$

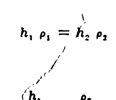
Igualando los valores de *p* y *p'*, resulta:

$$p_0 + h_1 \rho_1 = p_0 + h_2 \rho_2$$

o sea, simplificando:

$$h_1 \rho_1 = h_2 \rho_2$$

de donde se deduce:



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Ejemplo:

Si los líquidos son agua y mercurio se tiene:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{13{,}60\ gr/cm^3}{1\ gr/cm^3}$$

$$h_1 = 13{,}60\ h_2$$

De modo que por cada centímetro de columna de mercurio hay 13.60 cm. de columna de agua.

§ 114. — **Principio de Pascal.**— Consideremos un recipiente lleno de líquido y cerrado con un émbolo provisto de un pistón de sección s (fig. 260 a). El teorema general de la hidrostática nos dice que la diferencia de presión entre dos puntos de la masa líquida sólo depende de su diferencia de nivel. Por lo tanto, si en A ejercemos una fuerza F que produce un aumento de presión $p = F/s$, ese aumento se trasmitirá íntegramente a todos los puntos de la masa, para que la diferencia de presiones con la de A se mantenga constante. Esta consecuencia del teorema general de la hidrostática se conoce como *principio de Pascal* y se enuncia así:

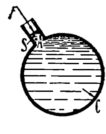


Fig. 260a

La presión ejercida sobre la superficie libre de un líquido en equilibrio se transmite íntegramente y en todo sentido a todos los puntos de la masa líquida.

De esta manera, si p_A y p_C son las presiones en A y C antes de aplicar la fuerza F, después de su aplicación dichas presiones serán:

$$p'_A = p_A + p$$

$$p'_C = p_C + p$$

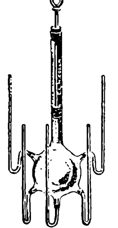


Fig. 260b. — *Aparato para comprobar el principio de Pascal.*

Este principio se comprueba con el aparato de la figura 260 b. Se observa que al actuar sobre el pistón del tubo vertical,

el nivel del líquido asciende valores iguales en todos los tubitos laterales.

§ 115. — **Prensa hidráulica.** — De acuerdo con el principio de Pascal, los líquidos trasmiten íntegramente, en todas direcciones, las presiones que sobre ellos se ejercen.

Si sobre un líquido encerrado en un recipiente ejercemos una presión p, obtenida mediante la aplicación de una fuerza f sobre un émbolo de sección pequeña, s, podemos recoger una fuerza F mucho mayor en otro émbolo de sección grande S (fig. 261).

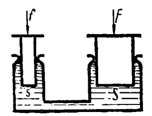


Fig. 261.—*Principio de la prensa hidráulica.*

Una fuerza $f = 1$ Kgr, aplicada sobre un émbolo de sección s = 1 cm² puede equilibrar a una fuerza F = 10.000 Kgr aplicada sobre otro émbolo de sección S = 1 m², porque en ambos émbolos las presiones aplicadas al líquido tienen el mismo valor:

$$p = \frac{f}{s} = \frac{F}{S} = 1 \frac{\text{Kgr}}{\text{cm}^2}$$

Esta propiedad se aplica en la *prensa hidráulica*, utilizándosela para producir grandes fuerzas de compresión.

Esquemáticamente la prensa hidráulica consta de un sistema de dos recipientes cilíndricos, comunicados por su parte inferior, en los que se mueven los émbolos de secciones s y S (figura 261) en contacto con el líquido.

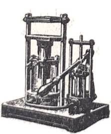


Fig. 262. — *Prensa hidráulica.*

Sobre el pequeño émbolo de sección s se aplica la fuerza f.

El émbolo grande necesita para el equilibrio la fuerza

$$F = f \cdot \frac{S}{s} \qquad (18)$$

Esta fuerza es aplicada por la resistencia del cuerpo sometido a la compresión. En la figura 262 se ve una prensa hidráulica con el dispositivo de bombeo para introducir el agua necesaria y la palanca para accionarlo.

§ 116. — **Trabajo y fuerza.** — La prensa hidráulica *multiplica la fuerza,* pero no el trabajo.

El trabajo de la fuerza f, suponiendo despreciables las pérdidas, sería igual al de la fuerza F. En realidad este último es siempre menor que el primero debido a los roces, indispensables para el perfecto ajuste de los émbolos.

En las condiciones ideales a un espacio e recorrido por el pistón chico le corresponde un espacio e' del émbolo grande, tal que se cumpla la condición:

$$f \times e = F \times e'$$

En efecto, suponiendo que no hay variaciones de volumen del líquido, el pistón grande sube e' comprimiendo el cuerpo, mientras el chico recorre un espacio e, tal que:

$$es = e'S \therefore e = \frac{S}{s} e'$$

y, por lo tanto:

$$e = \frac{F}{f} e' \therefore fe = Fe'$$

Ejemplo:

Si $s = 1$ cm² y $S = 200$ cm², para un recorrido $e' = 1$ cm debe tenerse: $e = 200$ cm $= 2$ m.

Este recorrido se integra por varios movimientos de descenso del pequeño émbolo, combinando un dispositivo de válvulas para el bombeo del agua necesaria para ir llenando el cilindro grande. Una palanca facilita la acción, permitiendo una multiplicación de la fuerza ejecutada (figuras 262 y 263).

Cálculo de la fuerza aplicada a la palanca. — Para tener una fuerza F dada debe actuar en el émbolo pequeño (fig. 263) la fuerza:

$$f = F \cdot \frac{s}{S}$$

y en el extremo de la palanca hay que aplicar la fuerza X tal que:

$$X \cdot a = f \cdot b$$

y por lo tanto:

$$X = f \cdot \frac{b}{a}$$

o sea:

$$X = \frac{s\,b}{S\,a} F \qquad [19]$$

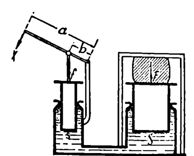


Fig. 263.—*Esquema de prensa hidráulica.*

§ 117. — **Principio de Arquímedes.** — Arquímedes, observando la pérdida aparente de peso que experimentan los cuerpos sumergidos en un líquido, estableció la ley que se conoce con el nombre de *principio de Arquímedes* y cuyo enunciado es el siguiente:

Todo cuerpo sumergido en un líquido recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del líquido que desaloja.

Así, por ejemplo, si sumergimos en agua un cuerpo cuyo volumen es $V = 80\ cm^3$, recibirá un empuje igual al peso de $80\ cm^3$ de agua, o sea de 80 gramos fuerza.

El mismo cuerpo sumergido en mercurio, cuyo peso específico es $13{,}60\ gr/cm^3$ recibirá un empuje igual al peso de $80\ cm^3$ de mercurio, o sea de:

$$80\ cm^3 \times 13{,}60\ \frac{gr}{cm^3} = 1088\ gr = 1.088\ Kgr$$

Si el cuerpo se sumerge parcialmente, el empuje que recibe es igual al peso del volumen de líquido desalojado o desplazado por la parte sumergida.

§ 118. — **Demostración del principio de Arquímedes.** — Puede demostrarse el principio de Arquímedes como consecuencia de las condiciones de equilibrio interno establecidas para los líquidos.

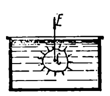


Fig. 264. — *Empuje en un cuerpo sumergido.*

Sobre el cuerpo sumergido *C* actúan las fuerzas *f*, normales a su superficie, debidas a la presión hidrostática del líquido. La resultante de todas esas fuerzas es el empuje de Arquímedes (fig. 264).

Para calcular su valor imaginemos reemplazado el cuerpo por igual volumen de líquido; tendremos así una masa homogénea en equilibrio.

La distribución de presiones en la superficie que limitaba el cuerpo no se ha modificado, y su resultante total (empuje) ha sido equilibrada por el peso de esa porción líquida, luego deben ser iguales.

El empuje estará aplicado en el centro de gravedad de la masa líquida desalojada, llamado *centro de empuje.*

§ 119 — **Verificación experimental.** — Puede comprobarse

experimentalmente la existencia de dicho empuje mediante la balanza hidrostática y el doble cilindro de Arquímedes.

La balanza hidrostática es un modelo de balanza dotada de platillos cortos, que llevan en su parte inferior unos ganchitos de los que pueden colgarse los cuerpos que se sumergen en líquidos, a fin de valorar los empujes que reciben.

De uno de los platillos y en la forma indicada en la figura 265 a se cuelgan los dos cilindros P y C, y se equilibra cargando el otro platillo con una tara T.

El P es macizo y el C hueco, siendo la capacidad de C exactamente igual al volumen de P.

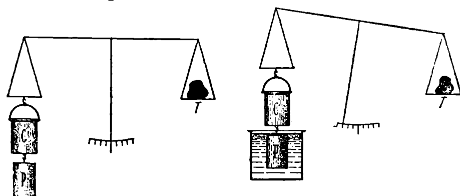


Fig. 265.—*Comprobación del principio de Arquímedes.*

Sumergiendo en agua el cilindro P se rompe el equilibrio, a causa del empuje recibido, que se trasmite al platillo de la balanza (figura 265 b).

Para probar que el empuje es igual al peso del volumen de agua desalojado, se llena de este líquido el cilindro C y se comprueba que se restablece el equilibrio de la balanza.

El empuje era, pues, igual al peso del volumen de líquido desalojado por el cilindro P, volumen que, colocado en C, restablece el equilibrio por efecto de su peso.

§ 120.— **Otra verificación experimental.** — No disponiéndose del doble cilindro, puede efectuarse la verificación con el dispositivo siguiente (fig. 266):

Se cuelga de la balanza un cuerpo cualquiera C', colocando un vasito B sobre el mismo platillo.

En seguida se equilibra con una tara T.

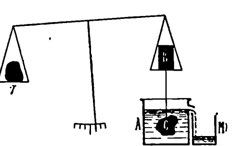


Fig. 266.—*Comprobación del principio de Arquímedes.*

Introduciendo el cuerpo C en el agua contenida en el

recipiente A, dotado de un pico lleno hasta el nivel del desborde, se observarán dos cosas:

a) La balanza se desequilibra por el empuje de abajo hacia arriba recibido por el cuerpo.

b) Por el pico desborda el agua cayendo al recipiente M un volumen igual al del cuerpo C.

Para restablecer el equilibrio bastará echar en el recipiente B el agua recogida en M.

Esto comprueba el principio de Arquímedes.

/ 121. — **Fuerza que actúa sobre el líquido.** — En virtud del principio de acción y reacción, podemos decir que al recibir el cuerpo sumergido en el flúido el empuje de abajo hacia arriba, ejerce sobre este último una reacción igual y contraria.

Es decir, que el cuerpo sumergido produce en el flúido un empuje dirigido de arriba hacia abajo igual al peso del volumen de aquel que desaloja.

Se lo verifica experimentalmente con el dispositivo indicado en la figura 267.

En una balanza de Roberval se coloca un recipiente R, con agua, sobre un platillo y otro menor R', vacío, en el otro, equilibrando con ayuda de una tara.

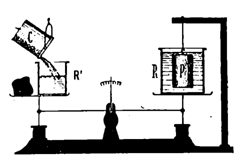


Fig. 267.—*Acción y reacción entre líquido y cuerpo sumergido.*

El cilindro macizo *p* se lo cuelga de un soporte adecuado, y luego se lo introduce en el líquido del recipiente R. El equilibrio se rompe de inmediato, acusando un empuje dirigido de arriba hacia abajo en R. Para probar que es igual al peso del líquido desalojado, basta con llenar de agua el cilindro hueco C y verter su contenido en el recipiente R', comprobando que el equilibrio se restablece.

§ 122. — **Cuerpos flotantes.**

1. — *Flotabilidad.*

Sumergido un cuerpo en un líquido, puede ocurrir que el empuje sea menor, igual o mayor que su peso.

En el primer caso, si el empuje es menor que el peso, el cuerpo se sumerge hasta llegar al fondo.

Si el empuje es igual al peso, flota en el seno de la masa líquida, es decir, queda en equilibrio en cualquier posición.

Si el empuje es mayor que el peso, el cuerpo flota en la superficie. En este caso emergerá parte del cuerpo, hasta que el empuje de la parte sumergida equilibre al peso.

Es fácil encontrar ejemplos: una esfera maciza de hierro colocada en agua se sumerge y en mercurio flota en la superficie. Una gota de aceite flota en el seno de una mezcla adecuada de alcohol y agua (figura 268).

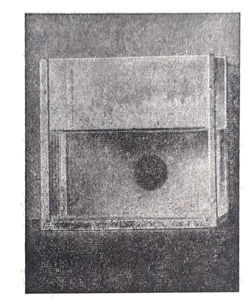


Fig. 268.—*Esfera de aceite flotando en el seno de una mezcla de alcohol y agua.*

La condición de flotabilidad es, pues:

$$E = P$$

2.—*El ludión y el submarino.*

Es curioso y fácil de explicar el funcionamiento del *ludión*, cuerpo hueco colocado en un líquido, en el cual se lo puede hacer ascender o descender a voluntad.

Está construído de vidrio y presenta un pequeño orificio en su parte inferior. Parcialmente lleno de agua, flota en el líquido en condiciones normales con un exceso muy pequeño del empuje sobre el peso. Al ejercer una presión sobre la parte superior del líquido, se trasmite a todo el recipiente y en particular al interior del flotador, aumentando la cantidad de agua que contiene, (se comprime el aire sobrante) y por lo tanto su peso excede al empuje y el ludión desciende. Regulan-

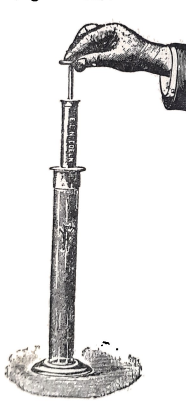


Fig. 269.—*Ludión.*

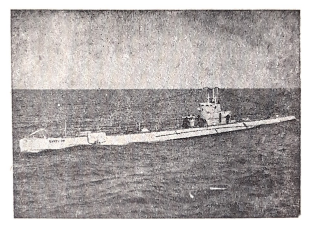


Fig. 270.—*Submarino argentino "Santa Fe".*

do la presión con la mano se lo mueve como se desea

El problema de los submarinos se resuelve en forma análoga; dejando penetrar agua para aumentar su peso se facilita la inmersión, que en parte también es producida por timones adecuados. La mayor dificultad se presenta cuando se desea que el submarino navegue a profundidad constante, pues una vez sumergido, tiende a ir al fondo.

§ 123. — **Equilibrio de cuerpos flotantes.**

El cuerpo flotante estará en equilibrio cuando los centros de gravedad y empuje se encuentren sobre una misma vertical.

En la figura 271 a se ha representado un prisma homogéneo flotando en equilibrio en la superficie; el centro de empuje *C* y el de gravedad G están en una misma vertical.

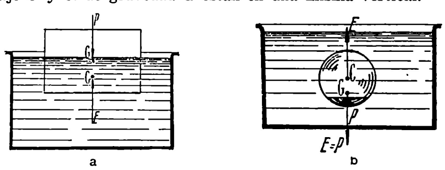


Fig. 271.—*Equilibrio de cuerpos flotantes.*

En la figura 271 b una esfera inhomogénea flota en el seno del líquido; el centro de empuje *C* coincide con el centro de figura y en la posición en equilibrio se encuentra en la vertical del centro de gravedad G.

§ 124. — **Estabilidad - Metacentro.**

Si el cuerpo flota en el seno del líquido, el equilibrio será estable cuando el centro de gravedad está debajo del centro de empuje (fig. 271 b). Es el caso de un submarino navegando bajo la superficie. Cuando el cuerpo sumergido es homogéneo, ambos centros coinciden y el equilibrio es indiferente; tal es el caso de la gota de aceite en la figura 268.

Cuando el cuerpo flota en la superficie, la condición de estabilidad no puede establecerse en forma sencilla, siendo posible el equilibrio estable aunque el centro de gravedad esté más alto que el centro de empuje. Para ello será necesario que, en todo pequeño desplazamiento del cuerpo alrededor de su posición de equilibrio, el peso y el empuje originen una cupla que lo lleve nuevamente a esta posición (figura 272).

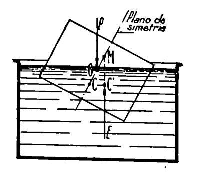


Fig. 272.—*Estabilidad: metacentro.*

En los cuerpos que presentan un plano de simetría longitudinal, como las embarcaciones (fig. 273) o el prisma de la figura 272, se llama **metacentro** (M) al punto de intersección del plano de simetría con la vertical que pasa por el centro de empuje C del cuerpo desviado.

Cuando el metacentro está más alto que el centro de gravedad, el equilibrio es estable, (figuras 272 y 273).

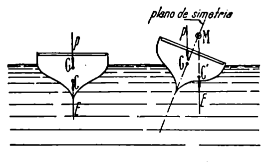


Fig. 273.—*Metacentro en una embarcación.*

En el caso general de un cuerpo cualquiera, se demuestra que el equilibrio es estable cuando la altura del centro de gravedad con respecto al centro de empuje, es mínima.

§ 125.—Determinación de pesos específicos y densidades.

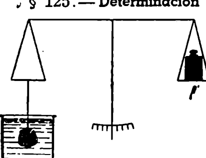


Fig. 274.—*Determinación de densidades con la balanza hidrostática.*

1.—*Método de la balanza hidrostática.*

El principio de Arquímedes proporciona un método cómodo para la determinación de pesos específicos y densidades.

Con la balanza hidrostática (fig. 274) se determina primero el peso del cuerpo en el aire, y luego, se lo pesa sumergido. La diferencia de ambos (p—p')

da el valor del empuje, o sea el peso del líquido desalojado.

El cociente:

$$D = \frac{p}{E} = \frac{p}{p - p'} \qquad [20]$$

es la *densidad relativa* o *peso específico relativo* del cuerpo con respecto al líquido.

Si ρ' es el peso específico del líquido, se tiene, como valor del peso específico del sólido:

$$\rho = \frac{p}{p - p'}\,\rho' \qquad [21]$$

Multiplicando, en cambio, D por la densidad δ' del líquido se tiene la *densidad* del sólido,

$$\delta = \frac{p}{p - p'}\,\delta' \qquad [22]$$

Si se desea obtener la densidad de un líquido, se pesa un cuerpo cualquiera, primero, sumergido en el líquido cuya densidad se busca, y luego, en el líquido de densidad conocida. Siendo p el peso del cuerpo en el aire, p' en el líquido de densidad conocida, y p'' en el líquido de densidad buscada, la densidad relativa:

$$D = \frac{p - p''}{p - p'} \qquad [23]$$

es el cociente de los pesos de iguales volúmenes de ambos líquidos (empujes que recibe un mismo cuerpo).

Conociendo la densidad δ' y el peso específico ρ' de uno de ellos, se calculan los del otro líquido:

$$\delta'' = \frac{p - p''}{p - p'}\,\delta' \qquad [24]$$

$$\rho'' = \frac{p - p''}{p - p'}\,\rho' \qquad [25]$$

En todas estas experiencias será necesario elegir un sólido que no flote, es decir, de mayor densidad que los líquidos utilizados y que no sea alterado por ellos.

2.— *Método del dinamómetro.* — Para determinaciones rápidas se puede emplear un simple dinamómetro, que da direc-

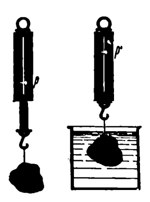
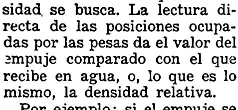


Fig. 275. — *Determinación de densidades con dinamómetro.*

tamente los pesos p y p' del cuerpo en el aire y sumergido. Se aplican las mismas fórmulas.

3.— *Balanza de Mohr.*— Se utiliza para densidades de líquidos con respecto al agua.

Trae un buzo que se sumerge en los distintos líquidos y un juego de pesas especiales tales, que la que corresponde a la unidad equilibra el empuje que recibe el buzo sumergido en agua destilada a 15° C de temperatura. Las restantes son 1/10 y 1/100 de la anterior. Corriendo las pesas sobre el brazo dividido en diez partes iguales, se llega a equilibrar el empuje que recibe el buzo en el líquido cuya densidad se busca. La lectura directa de las posiciones ocupadas por las pesas da el valor del empuje comparado con el que recibe en agua, o, lo que es lo mismo, la densidad relativa.



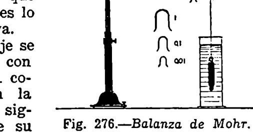


Fig. 276.—*Balanza de Mohr.*

Por ejemplo: si el empuje se equilibra con el jinete 1 colocado en la división 8, significa que su valor es 8 décimas del empuje que el buzo recibe en el agua, es decir, la densidad del líquido es 0,8 veces la del agua (D = 0,8).

§ 126.— **Densímetros y areómetros.** — Son flotadores de vidrio convenientemente lastrados (fig. 277); el volumen de la parte sumergida se modifica de acuerdo con el peso específico del líquido en que se los coloca. Una escala en el tubo vertical da directamente ese peso específico, por lectura al nivel libre del líquido. Para casos especiales se construyen densímetros con escala arbitraria (pesa leche, pesa alcoholes, etc.).

Se suelen utilizar los llamados areómetros de Beaumé, cuya escala es diferente según que se trate de líquidos más o menos densos que el agua, y se ha establecido en base a las densidades de soluciones de sal común en agua.

Fig. 277.— *Densímetro.*

Las relaciones entre los grados Beaumé y las densidades correspondientes son las siguientes:

a) Líquidos más densos que el agua:

$$\delta = \frac{144,3}{144,3 - n} \qquad [26]$$

b) Líquidos menos densos que el agua:

$$\delta = \frac{118}{118 + n} \qquad [27]$$

siendo n el número de grados Beaumé.

Así por ejemplo, el ácido sulfúrico del comercio corresponden $n = 66$ grados Beaumé, lo que equivale a una densidad:

$$\delta = \frac{144,3}{144,3 - 66} = 1,85$$

§ 127.—**Método del picnómetro o frasco.**—El picnómetro es un frasco de volumen fijo marcado por una línea de *enrase* (fig. 278).

1.—*Densidad de sólidos.*

Se lo llena de agua hasta el enrase y se determina su peso; luego se pesa el cuerpo cuya densidad se busca y, finalmente, se pesa el frasco con el cuerpo en su interior y lleno de agua hasta el enrase.

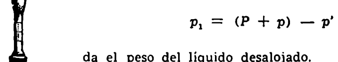
Si llamamos:

P = peso del frasco con agua

p = peso del cuerpo

p' = peso del frasco con el cuerpo en su interior

La diferencia



$$p_1 = (P + p) - p'$$

da el peso del líquido desalojado.

La densidad relativa seria:

$$D = \frac{p}{p_1} = \frac{p}{P + p - p'} \qquad [28]$$

Fig. 278.—Picnómetro.

y la densidad absoluta:

$$\delta = \frac{p}{P + p - p'}\,\delta' \qquad [29]$$



BLAS PASCAL (1623 - 1662)

Gran matemático, físico y filósofo francés.

Sus obras "Relatos de la gran experiencia del equilibrio de los líquidos" (París 1648) y "Tratado del peso de la masa del aire" (escrito en 1654 y publicado en 1663), contienen sus principales descubrimientos en el campo de la física.

A él se debe la ley fundamental de la transmisión de presiones, conocida como "principio de Pascal", la determinación experimental de la variación de la presión atmosférica con la altura y el invento del barómetro de sifón.

Espíritu selecto, fue un niño prodigio, que a los 12 años redactó por intuición, los principales postulados de Euclides.

Después de brillar en la ciencia, siguió una línea mística y filosófica buscando la perfección espiritual.

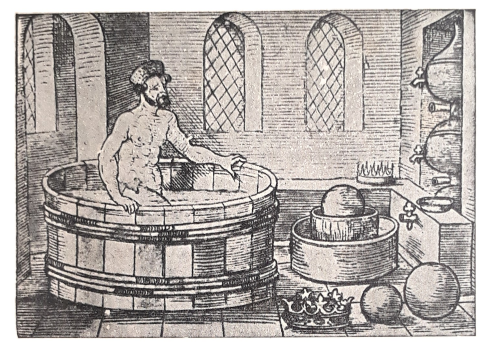
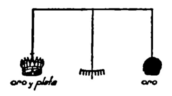


Fig. 279.—*Curioso grabado publicado en 1547 de acuerdo con la leyenda que atribuye a Arquímedes el descubrimiento de la ley que lleva su nombre mientras se bañaba.*

2.—*Densidad de líquidos.*

El mismo frasco, llenado con otro líquido de densidad δ" tendrá un peso *P"*.

Si es P_0 el peso del frasco vacío, la densidad relativa del líquido es:



$$D = \frac{P" - P_0}{P - P_0} \qquad [30]$$

y la densidad absoluta:

$$\delta" = \frac{P" - P_0}{P - P_0}\,\delta \qquad [31]$$

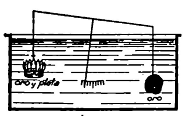


Fig. 280.—*Sobre cada platillo de la balanza actúa una fuerza igual a la diferencia entre el peso y el empuje. Si los cuerpos son de distinta densidad, el equilibrio depende del medio en que se colocan.*

Nota.—Históricamente se atribuye a Arquímedes (250 años a. C.) el descubrimiento del principio que lleva su nombre, preocupado por el deseo de resolver el problema de decidir si una corona que debía ser de oro, no había sido construída con otros metales menos nobles. La determinación del peso específico pesándola en el aire, y sumergida le permitió resolverlo sin destruir la corona.

Equilibrando en aire una balanza con dos cuerpos de distinta densidad, el equilibrio no subsiste al sumergir el conjunto en agua. El cuerpo menos denso recibe mayor empuje; tal sucede con la corona en la fig. 280.

§ 128.— **Tensión superficial.**

El teorema general de la hidrostática no es válido cuando se tienen porciones muy pequeñas de líquido; la superficie libre no es un plano horizontal en las proximidades de las paredes del recipiente, ni en el interior de tubos de pequeño diámetro.

Estos hechos se explican admitiendo la existencia de la *tensión superficial.*

Observamos que la superficie libre de los líquidos se comporta en cierto modo como una membrana elástica sometida a tensiones. Así, por ejemplo, si en una cubeta con mercurio colocamos licopodio sobre la superficie y tomando una varilla de vidrio la introducimos en la masa líquida, al retirarla observaremos el licopodio adherido sobre la varilla en toda su extensión, como si la superficie libre del líquido fuera una membrana elástica que se estira sin romperse al introducir la varilla.

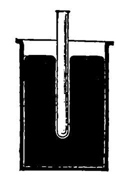


Fig. 281.—*La superficie libre del líquido se comporta como una membrana elástica.*

Una gota líquida que se forme en el extremo de un tubo por el cual fluye lentamente, adquiere las formas de una membrana elástica que se fuera llenando de líquido (fig. 282). Una gota sobre un vidrio se comporta como un pequeño saquito elástico (fig. 283).

Fig. 282.—*Formación de una gota.*

Fig. 283.—*Formas de gotas.*

Si en un pequeño marquito de alambre con uno de sus lados deslizable AB (fig. 284) formamos una lámina líquida (pompa de jabón), observaremos que, a menos que apliquemos una fuerza *F* para evitarlo, dicho lado será arrastrado hacia la parte superior. Además, podremos verificar que la fuerza *F es independiente* de la extensión de la membrana.

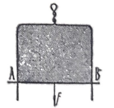


Fig. 284.—*Tensión superficial en membranas jabonosas.*

En las membranas elásticas se llama *tensión* en un punto , a la fuerza que debemos aplicar por unidad de longitud para que no se deforme en un corte perpendicular en A a la dirección que se considera (fig. 285). Se medirá, por tanto, en

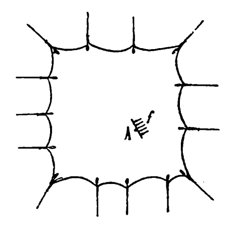


Fig. 285.—*Tensión en una membrana elástica.*

$$\frac{\text{dina}}{\text{cm}} ; \frac{\text{kgr}}{\text{m}} ; \frac{\text{gr}}{\text{cm}} \text{ o } \frac{\text{Newton}}{\text{m}}$$

Diremos, resumiendo: la superficie libre de los líquidos o la superficie de separación de dos líquidos se comporta como una membrana elástica cuya tensión f, que llamaremos tensión superficial, es la misma en todos sentidos. A igualdad de todas las demás condiciones, sólo depende de la naturaleza del líquido y es independiente de la extensión de la superficie.

Es por esta tensión que los pequeños insectos *caminan* sobre el agua, y ella nos permite hacer flotar en agua una aguja de acero apoyada suavemente.

§ 129.—**Explicación de la tensión superficial. Experiencias.**

1.—Estos fenómenos se explican por las acciones entre las moléculas líquidas. Cada molécula, en el seno del líquido, está sometida a las acciones de las que la rodean, y se encuentran comprendidas dentro de cierta esfera de radio r que lamaremos *radio de acción* (¹).

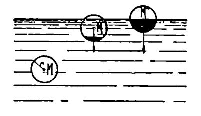


Fig. 286.

Todas esas acciones se equilibran en la molécula M (fig. 286).

En aquellas moléculas cuya distancia a la superficie es menor que dicho radio, las acciones de las restantes no se equilibran sino que dan una resultante dirigida hacia el interior del líquido, cuyo valor es máximo para las moléculas superficiales, como la M'' de la fig. 286. El líquido se encuentra, pues, sometido a la acción de una presión hacia el interior, y cada molécula superficial sometida a la acción de las moléculas que la rodean en la superficie (tensión superficial).

(1) Se calcula que ese radio es inferior a 0,1 μ.

Lo característico de la tensión superficial es que en el líquido *la tensión no varía al aumentar la extensión de la superficie*, contrariamente a lo que ocurre con las membranas elásticas sólidas, en que la tensión crece con el alargamiento.

Las mediciones experimentales dan para el agua a 20° un valor de la tensión superficial de 80 dinas/cm. De acuerdo con esto, la teoría permite calcular para la presión hacia el interior del líquido un valor aproximado de 10.000 Kgr/cm², pero no hay experiencia que permita comprobarlo.

2. — Para la observación de fenómenos debidos a la tensión superficial es cómodo formar láminas líquidas, utilizando agua de jabón con un poco de glicerina.

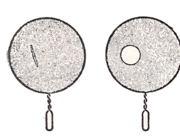
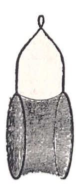
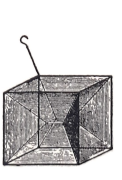


Fig. 287.—*La tensión superficial es uniforme en toda la membrana líquida.*

Sumergiendo un aro de alambre en ese líquido, al retirarlo se habrá formado una lámina líquida. Una experiencia simple consiste en colocar sobre esa lámina un pequeño lacito de hilo de coser; rompiéndola en el interior del lazo, para lo cual basta tocarla con la punta de un lápiz, se observa que se contrae hasta que aquél adopta la forma circular. Ello comprueba que existe una tensión uniforme y normal al borde del hilo (fig. 287).

§ 130. — **Tensión y energía superficial.** — La existencia de la tensión superficial nos indica que los líquidos poseen ener-





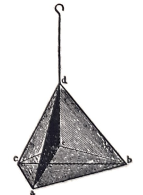


Fig. 288.—*Las membranas líquidas toman la forma de mínima superficie.*

gía de superficie. Todo cambio de forma que signifique una variación del área de su superficie, requiere trabajo. Si se aumenta la superficie es necesario un trabajo exterior que

queda en el líquido en forma de energía potencial superficial. En general, el líquido tendrá tendencia a adoptar la forma del sólido de menor superficie, o sea de energía potencial mínima. Ello explica porqué la gota de aceite de la figura 268 es esférica, y explica también las formas que adoptan las láminas líquidas de la figura 288 que pueden obtenerse fácilmente con marquitos de alambre y solución jabonosa.

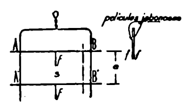


Fig. 289.—*Tensión superficial y energía potencial de superficie.*

En el marquito de la figura 289, si suponemos un desplazamiento *e* de la varilla *AB*, se realizará un trabajo igual al producto de la fuerza total F por el camino *e*. Llamando f a la tensión superficial, tenemos:

$$F = 2\,f\,.\,AB$$

(pues la lámina está limitada por dos superficies) y el trabajo es:

$$L = F \times e = 2\,f \times AB \times e$$

de donde resulta

$$f = \frac{L}{2\,AB \times e} = \frac{L}{2\,s} \qquad [32]$$

Y llamando S al aumento total de la superficie de la lámina (S = 2 s = 2 AB × e), se tiene:

$$f = \frac{L}{S} \qquad [33]$$

resulta así la tensión superficial igual al trabajo necesario para aumentar la extensión de la superficie en una unidad de superficie. Representa, entonces, una energía potencial de superficie.

§131. — **Capilaridad.**

1. — Hemos dicho que la superficie libre de los líquidos no es un plano horizontal en las proximidades de las paredes de los recipientes.

Distinguiremos dos casos: hay líquidos que no mojan las

paredes del recipiente (mercurio en vidrio) y en ellos la superficie libre es convexa; hay otros que mojan las paredes (agua en vidrio limpio) y entonces la superficie libre se hace cóncava (figura 290).

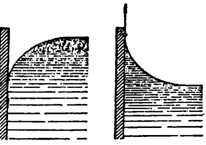
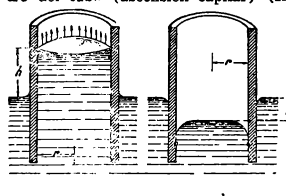


Fig. 290.—*Meniscos convexo y cóncavo.*

Explicamos este fenómeno admitiendo que en la línea de contacto de la superficie libre con el sólido aparece una fuerza hacia el exterior o hacia el interior del líquido, según que moje o no moje las paredes.

Colocando un tubo de pequeño diámetro (capilar) en un líquido que lo moje, las fuerzas que actúan en todo el perímetro interior provocarán una ascensión del líquido dentro del tubo (ascensión capilar) (fig. 291).



a b

Fig. 291.—*Ascensiones y depresiones capilares.*

En un líquido que no lo moje se produce una depresión capilar.

Los fenómenos capilares se observan en gran cantidad de hechos experimentales. Cuando, colocado en agua el borde de un trozo de papel o género, se moja en toda su extensión, se ha producido un fenómeno capilar. La ascensión de la savia en las plantas, desde la raíz hasta la copa, se produce en parte por capilaridad.

2.— *Ley de Jurin.* — En el tubo capilar de la fig. 291 a, cuyo radio es r, la fuerza total que provoca el ascenso del líquido será igual al producto del perímetro por la fuerza que actúa en la unidad de longitud:

$$F = 2\,\pi r\,.\,f \qquad [34]$$

El líquido ascenderá hasta que el peso de la columna líquida se equilibre con la fuerza F.

Dicho peso es:

$$P = \pi r^2 h \rho \qquad [35]$$

siendo ρ el peso específico del líquido.

Igualando [34] y [35]:

$$2\,\pi r f = \pi r^2 h \rho$$

de donde:

$$h = \frac{2f}{\rho r} \quad [36]$$

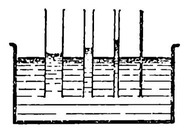


Fig. 292.—*La ascensión capilar es inversamente proporcional al radio del tubo.*

fórmula que nos dice que para un mismo líquido las ascensiones capi-

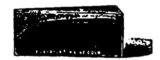




Fig. 293.—*Por capilaridad el agua asciende entre las dos láminas de vidrio alcanzando mayor altura donde las láminas se unen. En el mercurio, en vez de ascenso, hay depresión.*

lares son inversamente proporcionales a los radios de los tubos (figura 292).

También deducimos de esa fórmula el valor:

$$f = \frac{h \rho r}{2} \quad [37]$$

que permite calcular f que es, precisamente, la tensión superficial del líquido.

CAPÍTULO X

HIDRODINÁMICA

§ 132. — **Salida de líquidos por orificios. Teorema de Torricelli.** — La *hidrodinámica* se propone el estudio de la distribución de presiones y velocidades en las masas líquidas en movimiento.

Siendo el problema general muy dificultoso, nos limitaremos a los casos más sencillos, con hipótesis simplificativas que faciliten su estudio.

Si tenemos un recipiente lleno de líquido y practicamos un orificio en sus paredes, se producirá la salida del líquido. El teorema de Torricelli permite calcular la velocidad de salida y se enuncia así:

La velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio practicado en la pared delgada de un recipiente de gran sección, es la misma que adquiriría cayendo libremente en el vacío desde la superficie libre hasta el nivel del orificio.

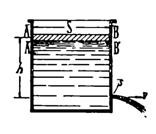


Fig. 294.

$$v = \sqrt{2gh} \qquad [1]$$

Para demostrarlo imaginemos un recipiente (fig. 294) de paredes delgadas, en el cual se ha practicado un orificio pequeño, de sección s. El líquido saldrá por s con la velocidad v que deseamos calcular.

En un pequeño intervalo de tiempo la superficie libre AB desciende hasta $A'B'$, habiendo salido por el orificio una masa m de líquido igual a la que ocupaba el volumen $ABB'A'$.

Si la sección S del recipiente es muy grande con respecto a la del orificio, el líquido se desplaza en él con velocidad muy pequeña, que supondremos nula, es decir, supondremos que no adquiere energía cinética. De este modo, la energía cinética de

la masa m que ha salido del recipiente será igual a la energía potencial que ha perdido al descender desde el nivel superior hasta el nivel del orificio:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh \qquad [2]$$

de donde:

$$v = \sqrt{2\,gh}$$

fórmula que coincide con la que dá la velocidad del cuerpo que cae libremente en el vacío desde la altura h.

Fig. 295.—*Influencia del espesor de la pared en la forma de la vena líquida.*

La condición impuesta de que el orificio sea practicado en pared delgada, proviene del hecho que, en los orificios practicados en paredes gruesas, se forman torbellinos que absorben energía modificando la velocidad de salida (fig. 295).

§ 133.—**Gasto o caudal. Sección contraída.**—Si v es la velocidad de salida del líquido y s la sección del orificio, saldrá por segundo una cantidad de líquido

$$Q = sv \qquad [3]$$

que se llama *gasto* o *caudal*. Se mide en $\frac{m^3}{seg}$ ó $\frac{m^3}{hora}$

En rigor, si bien el líquido sale por un orificio de sección s, forma una vena líquida cuya sección mínima está un poco más adelante del orificio de salida. Esta sección s_0 (fig. 295) se llama *sección contraída,* y el cociente.

$$k = \frac{s_0}{s} \qquad [4]$$

se llama *coeficiente de contracción*. Así, por ejemplo, para agua saliendo por un orificio circular en pared delgada, es: k = 0,64.

El caudal verdadero será entonces:

$$Q = s_c \,.\, v = k \,.\, s \,.\, v \qquad [5]$$

Ejemplo:

Se tiene un recipiente de gran sección lleno de agua y a 0.5 m debajo de la superficie libre, se practica un orificio circular de radio

1 cm. Calcular la velocidad de salida del agua, el caudal y el líquido total que sale en medio minuto, suponiendo que no varía el nivel en el recipiente.

De acuerdo con lo dicho será:

$$\text{fórm. [1]} \quad v = \sqrt{2g\,h} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}5} = 3{,}13 \ \frac{m}{seg}$$

$$\text{„} \quad [4] \quad s_c = k\,s = 0{,}64 \times \pi \times 1^2 = 2{,}01 \ cm^2$$

$$\text{„} \quad [5] \quad Q = v \,.\, s_c = 3{,}13 \times 0{,}000201 = 0{,}000629 \ \frac{m^3}{seg}$$

$$V = Q \quad t = v \,.\, s_c \,.\, t = 0{,}000629 \times 30 = 0{.}01887 \ m^3$$

§ 134.— **Comprobación del teorema de Torricelli.** — La validez del teorema de Torricelli se puede comprobar indirectamente midiendo el alcance horizontal de la vena líquida.

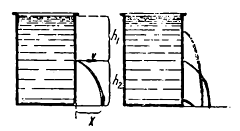


Fig. 296.—*Verificación experimental del teorema de Torricelli.*

Si el orificio se encuentra a una altura h_2 sobre el suelo, aplicando el principio de superposición de movimientos podemos calcular su alcance X. En efecto: si se superponen independientemente, el movimiento horizontal de velocidad v y el de caída de aceleración g, podemos escribir:

$$X = vt$$

$$h_2 = \tfrac{1}{2}\, gt^2$$

despejando t en la segunda:

$$t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

y reemplazando en la primera:

$$X = v \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

pero el valor de v está dado por el teorema de Torricelli:

$$v = \sqrt{2\,gh_1}$$

luego:

$$X\ \sqrt{2\,gh_1}\ \sqrt{2\,\frac{h_2}{g}}$$

o sea:

$$X = 2\ \sqrt{h_1 h_2}$$

La concordancia de este valor calculado con el que se mide experimentalmente comprueba la validez del teorema. Se comprende que el resultado no puede ser más que aproximado, porque no es posible realizar experimentalmente las condiciones que impone el enunciado del teorema de Torricelli.

§ 135. — **Teorema general de la hidrodinámica.** — Dijimos que la hidrodinámica estudia el problema de la distribución de presiones y velocidades en una masa líquida en movimiento.

Debemos distinguir distintas clases de movimientos: puede ocurrir que en cada punto de la masa líquida la velocidad y la presión varíen constantemente. En ese caso, en las fórmulas

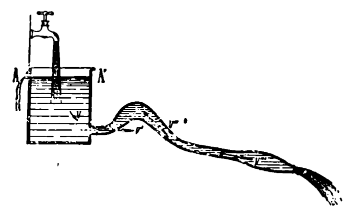


Fig. 297.—*Corriente líquida estacionaria.*

que dan ambos valores figurarán las coordenadas del punto y el tiempo.

Hay casos en que la velocidad y la presión son *constantes*

en cada punto. Así, por ejemplo, en el caso de la fig. 297, si el nivel del líquido en el recipiente se mantiene constante en AA', tendremos en cada punto de la masa líquida, una velocidad constante, aunque diferente para los distintos puntos. Decimos que se ha producido un **fenómeno estacionario.**

Las trayectorias que siguen las partículas líquidas se llaman **líneas de corriente.**

En algunos casos el líquido circula y en ciertas regiones se producen remolinos y torbellinos; el movimiento se llama *turbulento.*

Las líneas de corriente que pasan por los bordes de una superficie s cualquiera definen un tubo dentro de la masa líquida a través del cual el caudal es constante, pues no sale ni entra líquido por sus paredes laterales; se lo llama **filete líquido o tubo de corriente.**

Cuando el líquido de diferentes tubos de corriente no se mezcla, el movimiento se llama laminar.

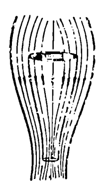


Fig. 298. — *Movimiento laminar; líneas y tubo de corriente.*

Para demostrar el teorema general de la hidrodinámica, consideremos un trozo de un filete líquido, comprendido entre dos secciones s y s' en las cuales las velocidades son v y v' *respectivamente.*

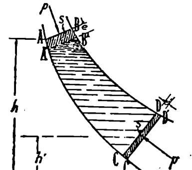


Fig. 299.

Por ser un filete ,el líquido que entra en la unidad de tiempo por la sección s debe ser igual al que sale por s':

$$q = s\ v = s'\ v' \qquad [6]$$

En un pequeño intervalo de tiempo, el líquido de la sección AB pasa a $A'B'$ y el de CD pasa a $C'D'$,siendo vol. $ABB'A'$ = vol. $CDD'C'$. Podemos considerar, pues, que la transformación operada ha consistido en que la masa m ha pasado de la altura h a la altura h'.

Las presiones p y p' han realizado trabajos:

$$p\ s\ e \quad y \quad - p'\ s'\ e' \qquad [7]$$

El peso de la masa m ha realizado un trabajo:

$$mg\ [h - h'] = \delta\ \omega\ g\ [h - h'] \qquad [8]$$

siendo δ la densidad y ω el volumen.

La variación de energía cinética es:

$$\frac{1}{2}\ m\ v'^2 - \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v'^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 = pse - p's'e' + \delta\, \omega\, g\, [h - h']$$

o sea:

$$\tfrac{1}{2}\, \delta\, \omega v'^2 - \tfrac{1}{2}\, \delta\, \omega\, v^2 = p\, \omega - p'\, \omega + \delta\, \omega\, g\, [h - h']$$

de donde:

$$\tfrac{1}{2}\, \delta . v'^2 + p' + \delta\, gh' = \tfrac{1}{2}\, \delta\, v^2 + p + \delta gh. \qquad [9]$$

y como

$$\rho = \delta\, g$$

puede también escribirse:

$$\left(p' + \frac{\delta\, v'^2}{2} \right) - \left(p + \frac{\delta\, v^2}{2} \right) = \rho\, (h - h') \qquad [10]$$

La suma:

$$p + \frac{\delta\, v^2}{2}$$

se llama **presión hidrodinámica** y la fórmula [10] nos dice que: la diferencia de presión hidrodinámica entre dos puntos de la masa líquida es igual a la diferencia de altura multiplicada por el peso específico del líquido.

Este enunciado comprende, como caso particular, el teorema general de la hidrostática cuando $v = v' = 0$.

La fórmula [9], que, dividida por $\rho = \delta\, g$, podemos escribir así:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2\, g} + h = \text{constante} \qquad [11]$$

se conoce como expresión del *teorema de Bernouilli.*

Notaremos que la presión hidrodinámica es igual a la suma de la presión hidrostática más la energía cinética de la unidad de volumen.

– § 136.—**Aplicación del teorema general de la hidrodinámica.** — Imaginemos el recipiente de la fig. 300 y el tubo horizontal (h = cte)

ABCDE, cuya sección variable tiene sucesivamente los valores 1 - 2 - 3 - 1.

Imaginando un líquido ideal circulando en forma tal, que el roza-

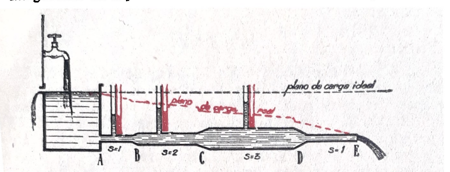


Fig. 300.—*Comparación de la distribución de presiones en la circulación de líquidos reales e ideales.*

miento con las paredes sea nulo; tendrá velocidades inversamente proporcionales a las secciones, pues debe ser:

$$q = s\ v = \text{constante.}$$

Por lo tanto en *CD* la velocidad del líquido será la tercera parte de la velocidad en *AB*. Aplicando el teorema de Bernouilli, en cada punto se verificará que la suma de la altura correspondiente a la presión hidrostática (indicada por el nivel en los tubos m), más la altura correspondiente a la energía cinetica en la unidad de volumen, debe dar un valor constante que coincida con el plano de la superficie libre en el recipiente. Este es el *plano de carga hidrodinámico.*

En los líquidos reales no ocurre eso, pues debido al rozamiento del líquido con las paredes, este plano de carga es inclinado, de modo que hay una *pérdida de carga* progresiva que aumenta en los cambios de sección y en las curvas de la cañería.

El teorema de Torricelli puede demostrarse aplicando el teorema general de la hidrodinámica. Llamando p_o a la presión exterior y considerando dos puntos: uno en el recipiente, próximo a la superficie libre, y el otro en el chorro de salida, tendremos:

Para el punto en la vena líquida:

$$p' = p_o \ ; \ v' = v$$

Para el punto en el recipiente:

$$p = p_o \ ; \ v = 0$$

desnivel: h

Aplicando la fórmula [10]:

$$\left(p_0 + \frac{\delta\, v^2}{2} \right) - \left(p_0 + 0 \right) = \rho h$$

de donde:

$$v = \sqrt{2\, gh}$$

§ 137.— **Viscosidad.** — En la definición de flúidos ideales hemos admitido que el desplazamiento de unas porciones con respecto a otras podía realizarse sin la acción de fuerzas.

En los líquidos reales esto no se cumple. Si hacemos girar un vaso lleno de líquido, alrededor de su eje, con velocidad constante, al principio el líquido quedará en reposo, pero poco a poco será arrastrado desde las capas que están en contacto con las paredes hacia el interior del vaso, hasta que, finalmente, todo el conjunto se moverá con igual velocidad. Entre dos capas líquidas que se mueven con distinta velocidad, se ponen en juego fuerzas que se oponen al movimiento de la más veloz y aceleran el de la más lenta. Decimos que el líquido tiene **viscosidad.**

Fig. 301.

Si dos capas cuya superficie de separación es AB, de área S, se mueven con velocidades tales que a la distancia e sus valores son v_1 y v_2, se comprueba que la fuerza f de frotamiento en la superficie AB es proporcional al área y a la variación de velocidad por unidad de longitud:

$$f = \eta . s \frac{v_2 - v_1}{e} \qquad [12]$$

El coeficiente η se llama **coeficiente de viscosidad** y es característico de cada sustancia. Se define como la fuerza que se opone al desplazamiento de una capa líquida con respecto a otra en la unidad de superficie de separación y cuando la variación de velocidad en dirección normal a dicha superficie es de una unidad por cada unidad de longitud.

Para el agua, en el sistema c. g. s. de unidades, su valor a 20° es:

$$\eta = 0.01004 \frac{g}{cm\ seg}$$

La temperatura influye mucho sobre el valor del coeficiente de viscosidad. Veamos algunos valores correspondientes al agua:

TABLA IX

temp.	0°	5°	10°	20°	50°	100°	160°
$\eta \ \frac{g}{cm\ seg}$	0.01797	0.01518	0.01307	0.01004	0.00551	0.00284	0.00174

También se suele expresar la viscosidad referida a la de un líquido que se toma como término de comparación.

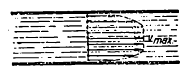


Fig. 302.—*Efecto de la viscosidad en la distribución de velocidades en un conducto.*

Debido a la viscosidad, cuando circula líquido por una cañería, su velocidad no es constante en toda la sección. La velocidad es nula para una capa líquida en contacto con las paredes de la tubería y crece hasta el eje en que tiene su valor máximo (fig. 302).

§ 138. — **El principio de acción y reacción en el movimiento de los líquidos.** — Cuando se produce la salida de un líquido por un orificio practicado en un recipiente, el líquido que sale posee una cantidad de movimiento igual al producto de la masa por su velocidad. Ello equivale al impulso de una fuerza que ha recibido del recipiente que lo contenía. Por el principio de acción y reacción, el recipiente habrá recibido un impulso igual y contrario; luego, al salir el líquido actúa sobre el recipiente una fuerza de sentido contrario a la dirección de salida.



Fig. 303.—*Carrito a reacción.*

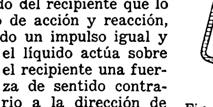


Fig. 304. — *Reacción de la vena líquida.*

En efecto: cuando el líquido se encuentra en equilibrio dentro del recipiente, están equilibradas las fuerzas que ejerce sobre el recipiente y las que éste ejerce sobre el líquido. Suprimida una parte de la pared (orificio) el sistema se desequilibra, pues desaparece en esa región la fuerza que el recipiente ejercía sobre el líquido y queda como excedente

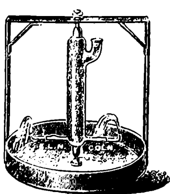


Fig. 305. — *Molinete hidráulico*

con respecto al recipiente la que el líquido ejerce sobre la pared opuesta. Si el recipiente puede hacerlo, se moverá bajo la acción de esa fuerza.

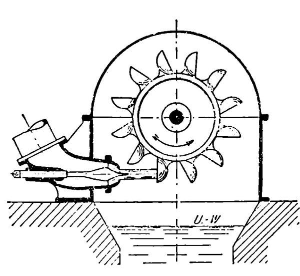


Fig. 306a—*Esquema de turbina hidráulica de acción (rueda Pelton).*

Como aplicaciones, podemos mencionar: el carrito a reacción de la fig. 303, el aparato a reacción de la fig. 304 y el molinete hidráulico de la fig. 305 en el que actúa una cupla de fuerzas.

Las turbinas hidráulicas, muy utilizadas en la técnica, funcionan por la aplicación de estos conceptos.

Existen de dos tipos: de *acción* y *reacción.*

En la de acción se produce la rotación de una rueda

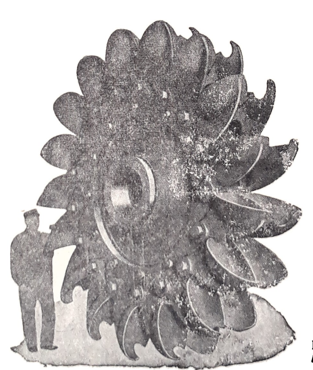


Fig. 306b. — *Rueda Pelton.*

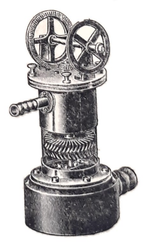


Fig. 307. — *Modelo de turbina hidráulica a reacción*

por el efecto del choque, contra aletas convenientemente dispuestas, de un chorro de líquido que sale de una tubería (fig. 306).

En las de reacción (fig. 307) la rotación se produce por la reacción de la corriente líquida al obligársele a cambiar de dirección de movimiento en la rueda móvil.

CAPÍTULO XI

GASES - PRESIÓN ATMOSFÉRICA - NEUMOSTÁTICA

§ 139.— **Gases. Peso del aire.** — Hemos definido los flúidos en el § 104, incluyendo a líquidos y gases en esa denominación. Pero luego hemos estudiado la mecánica de los líquidos atribuyéndoles la propiedad de ser incompresibles. En el estudio de los gases veremos que se caracterizan porque su volumen puede modificarse.

Toda masa de gas ocupa íntegramente el recipiente en que está colocado, y si éste es de volumen variable, el gas se comprime o se dilata de acuerdo a las modificaciones que experimenta el recipiente.

Como todos los cuerpos, los gases tienen peso. Para comprobarlo basta equilibrar sobre una balanza un balón con llave al cual se ha extraído el aire o parte de él con ayuda de una máquina neumática.

Se observa que al abrir la llave L, penetra nuevamente el aire y la balanza se desequilibra acusando un aumento de peso del balón.

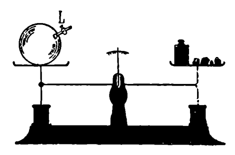


Fig. 308.—*Determinación del peso del aire.*

Colocando pesas en el otro platillo para restablecer el equilibrio, se obtiene el peso del aire extraído.

Se determina que cada metro cúbico de aire, en condiciones normales, pesa aproximadamente 1,3 kilogramos.

§ 140.— **Presión atmosférica. Experiencia de Torricelli.** La tierra está rodeada por una masa de aire, en cuya parte inferior estamos colocados. Se le atribuye un espesor de más de 500 Km, aunque, como veremos más adelante, no puede hablarse de límite de la atmósfera, ya que ascendiendo se produce una disminución progresiva y continua de densidad. La región de la atmósfera más próxima al suelo (troposfera), en la cual se producen los fenómenos atmosféricos co-

rrientes, no pasa de 12 Km. El resto constituye la estratosfera (fig. 309).

Todos los cuerpos colocados en la atmósfera están sometidos a una presión que llamamos *presión atmosférica,* cuyo origen podemos atribuir al peso de la masa de aire que la forma.

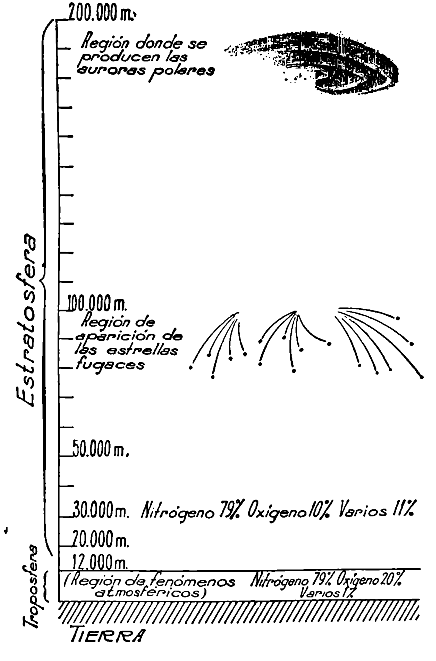


Fig. 309.—*Distribución de las capas atmosféricas.*

La existencia de esta presión se puede constatar con experiencias muy simples. Si tomamos un vaso cualquiera lleno de agua, lo tapamos con una hoja de papel y luego lo invertimos, observamos que el papel no cae, sosteniendo al agua del vaso (fig. 310). Como sobre el papel actúa la presión hidrostática del líquido, dirigida hacia abajo, esto nos obliga a admitir que de abajo hacia arriba actúa otra presión *H*.

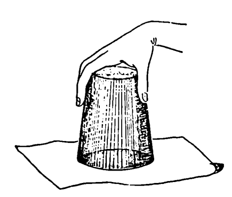


Fig. 310.—*Comprobación de la existencia de la presión atmosférica.*

La primera experiencia para medir la presión atmosférica fué realizada por el discípulo de Galileo, *Evangelista Torricelli* (1608 - 1647).

Consiste en llenar con mercurio un tubo de aproximadamente un metro de longitud, cerrado en uno de sus extremos. Se tapa el extremo abierto cuidando que no queden burbujas de aire y se lo coloca con el extremo cerrado hacia arriba en una cubeta con mercurio. Se observa que al destapar el extremo que quedó sumergido en el mercurio de la cubeta la columna mercurial desciende en el tubo hasta que su extremo queda aproximadamente a 76 cm de altura con respecto al nivel de la superficie libre en la cubeta (figura 311).

Esto nos indica que la presión atmosférica ejercida sobre el mercurio de la cubeta es igual a la presión hidrostática de la columna de mercurio de 76 cm de altura.

Cualquiera que sea la inclinación del tubo, la diferencia de nivel entre las superficies libres del mercurio en el tubo y en la cubeta es la misma, aunque aumente la longitud del tubo ocupada por el mercurio (fig. 311).

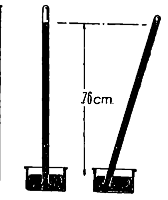


Fig. 311.—*Experiencia de Torricelli.*

§ 141. — **Presión atmosférica normal.** — En cada lugar la presión atmosférica sufre variaciones que presentan cierta vinculación con los fenómenos meteorológicos. Además, el

peso específico del mercurio varía con la temperatura y con el valor de la aceleración de la gravedad.

Definiremos como **presión atmosférica normal** la que equilibra una columna de mercurio de 76 cm de altura a 0° grado de temperatura y para un valor normal de la aceleración de la gravedad ($g = 980,665$ cm/seg²).

En virtud del teorema general de la hidrostática, la presión debida a dicha columna de mercurio es:

$$H = h \cdot \rho = 76\ cm \times 13,60 \frac{gr}{cm^3}$$

$$H = 1033 \frac{gr}{cm^2} \qquad [1]$$

esta presión se utiliza como unidad con el nombre de *atmósfera.*

$$1\ atm. = 1,033 \frac{Kgr}{cm^2} \qquad [2]$$

En la práctica se expresa la presión atmosférica directamente en *milímetros de mercurio* por ser proporcionales las alturas y las presiones.

§ 142.— **Barometría. Barómetros de mercurio.** — Los aparatos que se utilizan para medir la presión atmosférica se llaman **barómetros.**

Distinguiremos fundamentalmente dos tipos: de mercurio y metálicos.

Los barómetros de mercurio se fundan todos en la experiencia de Torricelli. Colocando al lado del tubo una regla graduada cuyo cero coincida con el nivel del mercurio en la cubeta, se lee directamente la presión por la altura de la columna en el tubo. Este dispositivo constituye el **barómetro de cubeta.**

Dicho barómetro presenta varios inconvenientes: aparte de ser incómodo su traslado, las variaciones de la presión atmosférica modifican a la vez el nivel del mercurio en el tubo y en la cubeta, haciendo variar la posición que debe ocupar el cero de la escala.



Fig. 312.— *Barómetro de cubeta.*

El *barómetro de sifón* de Gay-Lussac es portátil y su escala lleva el cero en la parte central, con lo cual la presión se determina leyendo las posiciones de ambos meniscos del mercurio (fig. 313).

El *barómetro de Fortin* es uno de los más cómo-

dos y usuales. Es un barómetro de cubeta con la particularidad de que el fondo de la misma, que es de *gamuza,* puede desplazarse mediante un tornillo adecuado, con lo cual se lleva exactamente a coincidir la superficie del mercurio con el cero de la escala, que está indicado por el extremo de una punta de marfil (v) (fig. 314).

Fig. 313.—*Barómetro de sifón.*

El conjunto se encuentra protegido con una envoltura metálica, que sólo deja visibles la parte superior del tubo y la parte de la cubeta que es de vidrio y permite ver la punta de marfil.

Las lecturas se efectúan con ayuda de un vernier, cuya aproximación oscila, según los modelos, entre 0,1 y 0,01 mm.

Para el transporte del barómetro se levanta el fondo de la cubeta, con lo cual el mercurio llena totalmente el tubo, evitándose así que pueda romperse o penetrar aire en su interior.

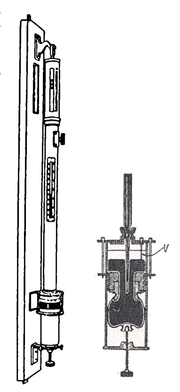


Fig. 314.—*Barómetro de Fortin.*

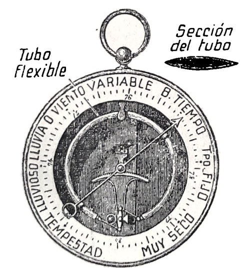


Fig 315.—*Barómetro metálico de Bourdon.*

Para que la lectura sea correcta es necesario que el tubo esté bien vertical. Para ello se cuelga el barómetro por un anillo de su parte superior o se lo sostiene en un trípode con suspensión cardánica.

§ 143. — Barómetros metálicos. — Para determinaciones de menor precisión se utilizan barómetros metálicos cuya lectura es más simple, pues

se realiza con aguja y cuadrante. Existen dos tipos: Bourdon y Vidi.

El de Bourdon consiste en un tubo curvo, hueco, de sección elíptica y cerrado en ambos extremos (fig. 315), de cuyo interior se ha extraído el aire. Al aumentar la presión exterior aumenta su curvatura, e inversamente al disminuir la presión disminuye la curvatura. Estando fijo uno de los extremos, las variaciones de forma originan desplazamientos del otro, que una cremallera transforma en rotaciones de una aguja móvil frente a una escala.

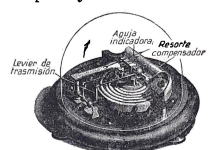


Fig. 316.—*Barómetro metálico de Vidi.*

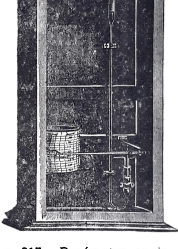


Fig. 317.—*Barómetro registrador a mercurio. Las variaciones de nivel del mercurio se trasmiten a la aguja inscriptora por intermedio de un flotador, y se registran sobre el tambor giratorio.*

En el barómetro aneroide de Vidi las variaciones de la presión atmosférica producen deformaciones en la tapa delgada de una caja metálica cerrada, sin aire en su interior (fig. 316).

Estas deformaciones se transmiten a una aguja que se mueve frente a una escala.

La escala de los barómetros metálicos se gradúa por comparación con los de mercurio, y, como hemos dicho, son menos precisos y se deterioran fácilmente.



Fig. 318.—*Barómetro metálico registrador o barógrafo.*

§ 144.—**Correcciones a las lecturas barométricas.**—Hemos dicho que la presión atmosférica se define en altura de columna de mercurio a cero grado de temperatura y para aceleración normal de la gravedad.

Sin embargo, cuando se lee la presión en un barómetro corriente de mercurio, no se encuentra en esas condiciones, pues ni la escala en que se lee la altura, ni el mercurio se encuentra a dicha temperatura:

además, por efecto de capilaridad, el mercurio ha ascendido *menos* de lo que corresponde a la presión del momento.

Será pues necesario hacer las correcciones: *de temperatura, de capilaridad y reducción a aceleración normal de la gravedad.*

a) Para la corrección de temperatura, se deben tener en cuenta: *el coeficiente de dilatación lineal* del material de la escala y *el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio*, la *altura leída* y la *temperatura* del instante en que se leyó la presión.

Hay tablas de *doble entrada* en que, fijado el material de la escala del barómetro, se lee directamente la corrección de temperatura en base a temperatura y presión leídas.

La corrección de temperatura debe restarse a la presión leída.

TABLA X

Corrección de temperatura en mm para lectura barométrica con escala de latón

Temperaturas	Alturas leídas				
	740	750	760	770	780
10°	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27
15°	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91
20°	2,41	2,44	2,47	2,51	2,54
25°	3,01	3,05	3,09	3,13	3,17

b) La corrección de capilaridad depende del diámetro del tubo. La tabla da su valor en función del diámetro del tubo y de la altura del menisco (fig. 319). Esta corrección debe sumarse a la lectura.

TABLA XI

Corrección de Capilaridad

Diámetro del tubo mm	Altura del menisco en mm				
	0.4	0.8	1.0	1.2	1.4
4	0,84	1,54	1,98	2,37	
6	0,27	0,56	0,78	0,98	1,21
8		0,29	0,38	0,46	0,56
10		0,15	0,20	0,25	0,29
12		0,07	0,10	0,13	0,15

Ejemplo:

En un barómetro de Fortin, en que el diámetro del tubo es 10 mm, se ha leído una altura $H = 770$ mm a 20° de temperatura siendo la flecha del menisco $f = 1.2$ mm. Corregir los errores de temperatura y capilaridad.

De la primera tabla deducimos:

Corrección de temperatura: $\Delta = -2{,}51$ mm

De la 2ª:

Corrección de capilaridad: $C = +0.25$ mm

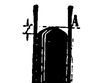


Fig. 319. — *Flecha del menisco en el barómetro de mercurio.*

Lectura corregida:

$$H' = H - \Delta + C \qquad [3]$$

$$H' = 770 - 2{,}51 + 0.25 = 767{,}74 \text{ mm}$$

c) Para corregir con respecto a la aceleración de la gravedad se multiplica la lectura corregida por el cociente $\frac{g}{g_n}$ de la aceleración del lugar por la aceleración normal. Si para Buenos Aires admitimos $g = 979{,}669$, resulta en el ejercicio anterior:

$$H_c = 767{,}74 \frac{979{,}669}{980{,}665} = 766{,}96 \text{ mm}$$

Debemos notar que todas estas correcciones se aplican a la altura correspondiente a la tangente en la cúspide del menisco (A en la fig. 319). Se deduce de los trozos de tables reproducidos y del ejemplo, que la corrección más importante es la de temperatura, si el diámetro del tubo no es muy pequeño.

§ 145. — **Comprobaciones de la existencia de presión atmosférica.** — Hemos mencionado la experiencia del vaso lleno de

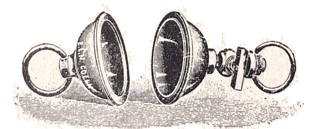


Fig. 320.—*Hemisferios de Magdeburgo.*

agua e invertido después de haberlo tapado con un papel, para comprobar la existencia de la presión atmosférica.

En el siglo 17, Otto von Guericke (1602-1686), realizó la hoy clásica experiencia de los hemisferios de Magdeburgo. Se extrae el aire en una esfera dividida en dos hemisferios, que se adosan perfectamente. La presión atmosférica actuando sobre la superficie exterior, impide separarlos, a menos que la fuerza sea suficientemente grande. Von Guericke utilizó hemisferios cuyo diámetro interior era aproximadamente de 55 centímetros.

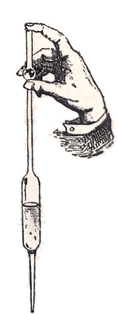


Fig. 321.—*Pipeta para líquidos. La presión atmosférica impide el derrame.*

Admitiendo que con sus máquinas imperfectas de vacío hubiera quedado en el interior aire a una presión mitad de la exterior, la fuerza necesaria para separarlos habría sido de unos 1.200 Kgr. Se explica que necesitara ocho caballos para conseguirlo (ver plancha VI).

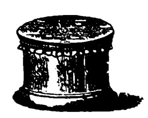


Fig. 322.—*Rompevejigas.*

La fuerza total sobre cada hemisferio se calcula proyectando las fuerzas normales que actúan en cada elemento de superficie, sobre la perpendicular al plano diametral que los separa.



Fig. 323.—*Corta-manzanas.*

Se demuestra que la resultante total es igual a la fuerza que actuaría normalmente sobre el área del círculo máximo. En este caso, es:

$$F = \pi R^2 p = \pi \times 27{,}5^2 \times \frac{1{,}033}{2} = 1.200 \text{ Kgr}$$

En las experiencias de las figuras 322 y 323 la presión atmosférica se manifiesta por la rotura de una membrana tensa o el corte de una manzana apoyada sobre la boca de un recipiente en cuyo interior se hace el vacío.

Con el tubo de la figura 324, de cuyo interior se ha extraído el aire, se obtiene una fuente en el vacío, al abrir la llave. En la fig. 325, se muestra el efecto de la presión atmosférica sobre un recipiente de hojalata que se enfrió repentinamente después de haberlo calentado y cerrado herméticamente.

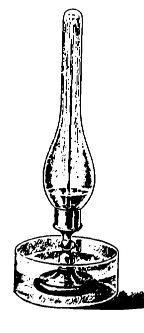


Fig. 324. *Fuente de vacío.*

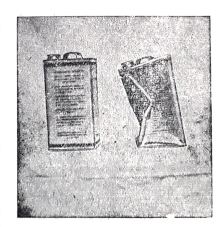


Fig.—325.—*Acción de la presión atmosférica sobre un recipiente en cuyo interior se ha producido un enrarecimiento.*

§ 146. — **Variación de la presión atmosférica con la altura.** — Si ascendemos por una montaña o nos elevamos en un avión llevando un barómetro, observaremos que la presión disminuye a medida que aumenta la altura. Es que siendo el aire un flúido pesado podemos aplicar el teorema general de la hidrostática. La diferencia de presiones entre dos puntos cuyas alturas son h_1 y h_2, será:

$$p_2 - p_1 = \rho\ (h_2 - h_1) \qquad [4]$$

siendo ρ el peso específico del aire.

La dificultad que se presenta es que la variación de presión va acompañada por una variación de peso específico del aire, de modo que ρ no es constante.

Podremos aplicar la fórmula [4] para aquellas diferencias de altura suficientemente pequeñas como para que pueda considerarse constante el peso específico del aire.

Así, por ejemplo, calcularemos cuánto hay que ascender al nivel del mar para que la presión disminuya 1 mm. Es decir:

$$1 \text{ mm de } Hg = 1{,}360\ \frac{gr}{cm^2}$$

y siendo

$\rho = 0{,}001293\ \dfrac{gr}{cm^3}$, aplicando la fórmula [4]

$$h_2 - h_1 = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1{,}360}{0{,}001293}\ \text{cm} = 1051\ \text{cm}$$

Luego: al nivel del mar la presión atmosférica disminuye aproximadamente 1 mm cada 10 ½ metros de ascensión.

Para alturas grandes se utilizan, con objeto de determinar la diferencia de nivel en base a las diferencias de presión (nivelación barométrica), fórmulas más exactas deducidas por otros caminos y corregidas experimentalmente.

Así, por ejemplo, pueden utilizarse las siguientes:

para alturas hasta 1000 *metros*:

$$h_2 - h_1 = 16000\ (1 + 0.004\ t)\ \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \qquad [5]$$

y para alturas mayores:

$$h_2 - h_1 = 18400\ (1 + 0.004\ t)\ (\log p_1 - \log p_2) \qquad [6]$$

siendo t la temperatura media entre ambas estaciones.

§ 147. — **Naturaleza de la presión en los gases.** — Aunque en el cálculo de la variación de presión con la altura aplicamos el teorema general de lo hidrostática, es interesante hacer notar que la presión que un gas ejerce sobre las paredes del recipiente en que está contenido no es de la misma naturaleza que la de los líquidos. En la experiencia del vaso invertido del § 140, si en lugar del agua dejamos aire, cuyo peso específico es 800 veces menor, el papel cae, porque en ése caso no sólo actúa sobre él el peso de la columna goseosa que queda dentro del vaso, sino también la *fuerza elástica* del gas que es igual a la del aire exterior.

Si imagináramos dos recipientes, uno lleno de agua y el otro de aire a la presión atmosférica, y los lleváramos a un lugar del espacio en que no se manifestara la acción gravitatoria, desaparecería la presión del líquido sobre las paredes y el fondo del recipiente, y, no así la del gas, que subsistiría casi íntegramente, porque en ese caso la presión debida al peso es mínima comparada con la que producen las fuerzas elásticas.

En la teoría cinética de la materia se admite que los gases están formados por moléculas que se mueven con rápidos movimientos de traslación chocando entre sí y contra las paredes. Del conjunto de choques contra las paredes del recipiente resulta la presión ejercida por el gas. Con esta imagen se explica fácilmente el hecho de que los gases ocupen totalmente el volumen en que se hallan colocados.

§ 148.—**El principio de Arquímedes en gases.**—El principio de Arquímedes se aplica a los gases tal como se ha enunciado para los líquidos.

Todo cuerpo sumergido en un gas recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del gas que desaloja.

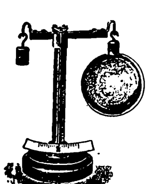


Fig. 326. — Baroscopio para comprobar el principio de Arquímedes en gases.

Se lo comprueba fácilmente con el aparato de la figura 326 (baroscopio o baróscopo). Una esfera y una pesa de menor volumen se equilibran en el aire. Al colocar el sistema bajo una campana y hacer el vacío, como desaparece el empuje del aire, la esfera cuyo volumen era mayor y, por lo tanto, experimentaba mayor empuje, pesará más, y el baróscopo se desequilibra.

Un razonamiento análogo al que se hizo en el caso de los líquidos permite asegurar la validez de esta ley (§ 118).

Como consecuencia de este principio, cuando pesamos cuerpos en el aire, con una balanza de platillos, en rigor, lo que se iguala es el peso aparente del cuerpo con el peso aparente de las pesas, o sea, las diferencias entre los respectivos pesos y empujes.

Si el cuerpo que se pesa es de distinta densidad que las pesas, el equilibrio en el aire no subsistirá en el vacío, como en el caso del baróscopo. Por ello, cuando se desean determinaciones precisas, *se reduce la pesada al vacío* por cálculo o con ayuda de tablas especiales.



Fig. 327.—*Aeróstato a aire caliente de Montgolfier* (1783)

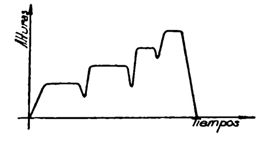


Fig. 328.—*Curva de ascensión de un aeróstato.*

§ 149. — Aeróstatos. — Los aeróstatos, hoy en desuso, resuelven el problema del vuelo del *más liviano que el aire.*

Se basan exclusivamente en el principio de Arquímedes: ascienden porque el empuje es mayor que el peso. Están constituídos por una envoltura



EXPERIENCIA HISTÓRICA DE LOS HEMISFERIOS DE MAGDEBURGO

En 1654 Otto Von Guericke, en presencia del Emperador Fernando III, empleó 16 caballos para separar dos hemisferios ajustados y en cuyo interior habia hecho el vacio (Véase párrafo 145).

Los hemisferios tenían aproximadamente 55 cm. de diámetro; la diferencia entre las presiones atmosférica e interna en su superficie determinó una fuerza total equivalente a la de ocho caballos. Se los guarda en el museo de Berlín.

liviana de gran volumen, que se llena con gas de alumbrado, hidrógeno o helio. Si V es el volumen total, P el peso de la envoltura, barquilla y gas interior, y ρ el peso específico del aire, la *fuerza ascensional* será:

$$F = \rho V - P \qquad [7]$$

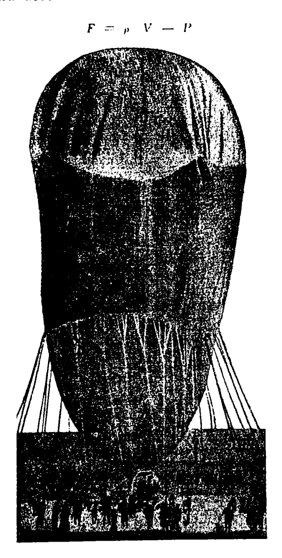


Fig. 329.—*Aeróstato empleado por Piccard en su ascensión a la estratosfera con fines de investigación científica* (1932).

Esta fuerza no se mantiene constante, pues al ascender disminuye ρ.

Para que la presión interna no supere a la exterior, el lobo tiene una válvula en su parte inferior.

Al principio, como no se lo llena totalmente, el globo asciende y se va dilatando hasta tomar su forma esférica. Alcanza así una posición de equilibrio estable. Pero debido a las pérdidas de gas y entrada del aire exterior, pierde estabilidad y comienza a descender; si se desea ascender más es necesario disminuir el peso, para lo cual se deja caer parte del lastre. El proceso se repite hasta que la falta de lastre obliga al descenso.

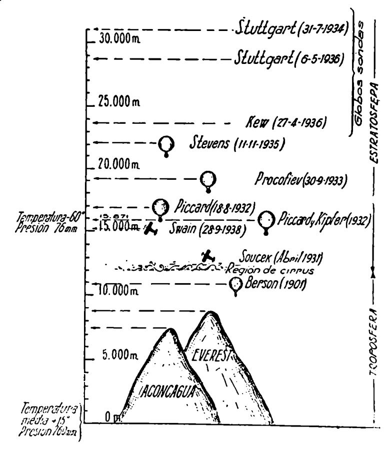


Fig. 330. — *Alturas alcanzadas en diversas ascensiones. Con proyectiles cohete se han superado en 1948 los 100 Km. E 1957 se alcanzó los 6500 Km y los satélites artificiales alcanzaron los 1500 Km. En la misma escala la figura debiera ser más de 200 veces más alta.*

La habilidad del aeronauta se manifiesta en la regulación en el consumo del lastre. El ascenso se verifica por escalones, como indica la figura 328.

Los hermanos Montgolfier, en 1783, fueron los primeros en realizar una ascensión en un globo lleno de aire caliente, como los que en la actualidad lanzan los niños en sus juegos

CAPITULO XII

LEY DE BOYLE-MARIOTTE — BOMBAS — MAQUINAS NEUMATICAS

§ 150.—**Compresibilidad de los gases. — Ley de Boyle-Mariotte** [1]. — Hemos visto que una masa de gas adapta su volumen al del recipiente que la contiene; por tanto, se expandirá si este último aumenta y se comprimirá si disminuye.

Las variaciones de volumen van siempre acompañadas por cambios de la presión en la masa gaseosa y a menudo también por cambios de temperatura.

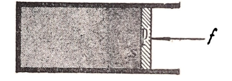


Fig. 331.

Si en el aparato de la figura 331 aplicamos una fuerza f sobre el pistón P, el gas encerrado en el recipiente cilíndrico reducirá su volumen, pero al mismo tiempo aumentará su presión.

El émbolo avanzará, comprimiendo al gas, hasta una posición en que la presión interna de éste haya aumentado en un valor igual a $\frac{f}{s}$, equilibrando el aumento de la presión exterior debido a la fuerza aplicada.

Si la compresión se efectúa rápidamente, se observará, además, que el gas se calienta.



Fig. 332.—*Eslabón neumático.*

La figura 332 muestra el aparato llamado eslabón neumático; una compresión brusca provoca el encendido de un trozo de yesca, que se ve arder a través de las paredes de vidrio del cilindro.

(1) Descubierta por Roberto Boyle, de Oxford, en 1662, e independientemente por el físico francés Mariotte en 1679.

Si la fuerza se aplica en forma gradual, la compresión se produce lentamente y no provoca fenómenos térmicos apreciables. Suprimida la fuerza *f*, el gas vuelve a su volumen inicial, expandiéndose y disminuyendo su presión interna.

Nos limitaremos en lo que sigue a estudiar el comportamiento de los gases cuando se comprimen o se expanden sin cambiar su temperatura (compresiones y expansiones *isotérmicas*).

Boyle y Mariotte descubrieron independientemente la ley que rige las variaciones isotérmicas del volumen de una masa gaseosa, la que se enuncia así:

A temperatura constante, los volúmenes de una masa gaseosa son inversamente proporcionales a las presiones que soporta.

Llamando p_1, p_2 a las presiones correspondientes a dos estados de una misma masa gaseosa y V_1, V_2 a los volúmenes respectivos, debe tenerse:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \qquad [1]$$

de donde:

$$p_1V_1 = p_2V_2 = \text{constante}$$

y también, refiriéndonos a dos valores correspondientes cualesquiera de la presión y del volumen, podemos establecer la expresión más general de la ley de Boyle-Mariotte:

$$pv = \text{constante} \quad (T = c^{te}) \qquad [2]$$

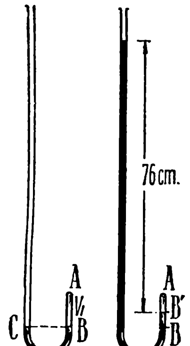


Fig. 333.—*Verificación experimental de la ley de Boyle-Mariotte.*

§ 151.— **Verificación experimental.** — 1. Puede hacerse la verificación para presiones poco superiores a una atmósfera con el tubo de Mariotte (fig. 333).

Es un tubo en U con una rama corta cerrada, en la cual queda una masa de aire que inicialmente ocupa un volumen V_1, proporcional a la longitud AB, pues el tubo es cilíndrico y bien calibrado.

Colocando mercurio de modo que en las dos ramas quede

al mismo nivel CB, el volumen V_1 de aire estará a la presión exterior. Por tanto, $p_1 = H = 76$ cm de mercurio aproximadamente. Agregando mercurio por el extremo abierto D, la columna mercurial ejercerá presión sobre el aire contenido en AB disminuyendo su volumen.

Se observará que este volumen se reduce a la mitad de V_1, $(AB' = \frac{AB}{2})$, cuando *el desnivel entre las superficies del mercurio en las dos ramas es de 76 cm.*

Como la presión vale ahora: $p_2 = 2$ atmósferas (la que había inicialmente, más los 76 cm de mercurio de desnivel), hemos comprobado que a presión doble le corresponde volumen mitad, de acuerdo al enunciado.

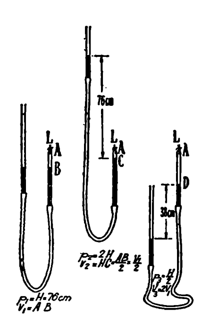


Fig. 334.—*Comprobación de la ley de Boyle-Mariotte para presiones mayores y menores que la atmosférica.*

Pueden hacerse verificaciones para posiciones intermedias del nivel del mercurio en el tubo abierto.

Así por ejemplo, en un tubo de Mariotte, en el que AB = 20 cm, estando los ceros de las escalas al mismo nivel, podremos establecer para el estado inicial (aceptando que el barómetro marque la presión normal $H = 760$ mm en el momento de la experiencia):

$p_1 = 76$ cm $\left(p_1 = 76 \times 13{,}60 \frac{gr}{cm^2}\right)$

$V_1 = 20$ cm $\quad (V_1 = 20 \times$ sección del tubo en $cm^2)$

Cuando el volumen se reduce a la mitad se tiene:

$$p_2 = 76 + 76 = 152 \text{ cm.}$$

$$V_2 = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm.}$$

(El nivel del mercurio en la rama abierta llegará entonces a 86 cm, para que el desnivel sea 76 cm, ya que en la cerrada subió 10 cm).

En una posición intermedia cuando el volumen es $V_3 = 15$ cm $= \frac{3}{4} V_1$, se tiene un desnivel de sólo 25 1/3 cm.

La presión correspondiente es: $p_3 = 76 + 25\ 1/3 = 101\ 1/3$ cm $= 4/3\ p_1$, cumpliéndose la ley:

$$p_1\, v_1 = p_2\, v_2 = p_3\, v_3 = \text{constante}$$

$$76 \times 20 = 152 \times 10 = 101 \frac{1}{3} \times 15 = 1520$$

Lo mismo puede verificarse para cualquier otro valor del volumen entre V_1 y V_2.

2. — *Otra disposición práctica.* — La comprobación puede extenderse más allá de las 2 atmósferas, y también a presiones menores, empleando el aparato representado en esquema por la figura 334, formado por un tubo cerrado con una llave L, en que se coloca la masa de gas sometida a la experiencia, y otro abierto, comunicado con el primero por su parte inferior mediante un tubo de goma lleno de mercurio. Según el sentido de los desniveles, el gas se comprime o se expande. La figura 335 muestra un modelo con su soporte, y la regla graduada en que se leen los niveles del mercurio.

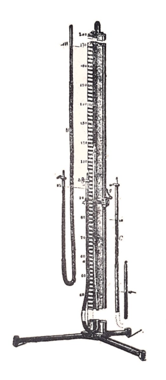


Fig. 335. — *Aparato para comprobar la ley de Boyle-Mariotte.*

En la figura 334 se han establecido los valores de p y V para 3 estados, comprobándose que $p_1 v_1 = p_2 v_2 = p_3 v_3$.

§ 152. — **Representación gráfica.** — 1. Tomando dos ejes de coordenadas OP y OV sobre los que se llevan como abscisas los valores de los volúmenes *V* y como ordenadas los de las presiones *p*, puede representarse cada estado de la masa gaseosa por un punto del plano. Uniendo todos esos puntos se tiene la curva representativa del fenómeno.

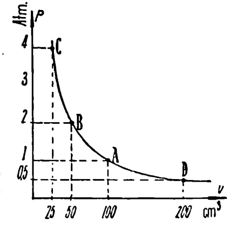


Fig. 336. — *Representación gráfica de la ley de Boyle-Mariotte*

Consideramos 4 estados sucesivos de una masa de gas a la temperatura de 15 grados centigrados, y sean sus presiones y volúmenes los que siguen:

p_1 = 1 atmósfera V_1 = 100 cm³

p_2 = 2 atmósferas V_2 = 50 cm

p_3 = 4 atmósferas V_3 = 25 cm³

p_4 = 0,5 atmósfera V_4 = 200 cm³

En la figura 336 estos cuatro estados están representados por los puntos A, B, C y D, respectivamente.

Como para todos los estados de la masa gaseosa se cumple la condición: p . V = constante, siempre que siga a la temperatura dada, es posible trazar la curva, ya que responde a la ecuación: $xy = a$, siendo, por tanto, una hipérbola equilátera, que no corta a los ejes, puesto que:

$$\text{para} \quad p = 0, \quad V = \infty, \; [V = \frac{a}{p} = \frac{a}{0} = \infty]$$

$$\text{y para} \quad V = 0, \; p = \infty, \; [p = \frac{a}{V} = \frac{a}{0} = \infty]$$

2.— Haciendo variar la temperatura de la masa de gas estudiada cambia la constante a, pero no el tipo de curva. Se tiene así una hipérbola para cada temperatura (fig. 337).

Cada una de ellas constituye una *isoterma* o *línea isotérmica.*

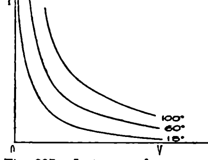


Fig. 337.—*Isotermas de un gas a diversas temperaturas.*

§ 153.— **Densidad y presión en los gases.** — Como todo aumento de presión implica una disminución de volumen, se comprende fácilmente que origina un aumento de densidad. Para dos presiones p_1 y p_2 y una masa M de gas, se tienen las densidades:

$$\delta_1 = \frac{M}{V_1} \text{ y } \delta_2 = \frac{M}{V_2}$$

y, como la masa es constante:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{M}{V_1}}{\frac{M}{V_2}} = \frac{V_2}{V_1}$$

pero, de acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, y,

entonces:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad [3]$$

Por tanto, *las densidades de una masa de gas*, considerada a temperatura constante, *son proporcionales a las presiones que soporta.*

Ejemplo. — A la temperatura de 0° (hielo en fusión), y presión de 760 mm de mercurio, la densidad del aire es 0,001293 g/cm³. Calcular qué densidad tendrá a 4 atmósferas de presión y a la misma temperatura.

Se tiene:

$p_1 = 1$ atmósfera; $\delta_1 = 0{,}001293$ g|cm³

$p_2 = 4$ atm.

$$\delta_2 = \delta_1 \frac{p_2}{p_1} = 0{,}001293 \text{ g|cm}^3 \times 4 = 0{,}005172 \text{ g|cm}^3.$$

§ 154—**Inexactitud de la ley de Boyle-Mariotte.** — Los gases reales no cumplen rigurosamente la ley de Boyle-Mariotte. Numerosos experimentadores han medido con toda precisión las variaciones de volumen de masas de los gases más conocidos, relacionándolos con las presiones correspondientes y con los valores iniciales de éstas. Regnault operó con aire, nitrógeno, hidrógeno y anhídrido carbónico entre 1 y 30 atmósferas, usando un aparato análogo al tubo de Mariotte, cuya rama larga tenía 24 metros de longitud. Este tubo fué arrimado a la torre del "Colegio de Francia" y sostenido por un mástil; la rama corta tenía 3 metros de largo y estaba envuelta por otro tubo de vidrio, por el que circulaba agua con objeto de mantener constante la temperatura. El mercurio se inyectaba por la parte inferior con una bomba, dando a la presión inicial valores arbitrarios, y aumentándola luego hasta reducir a la mitad el volumen del gas encerrado en la rama corta.

Siendo: p_0, v_0 la presión y volumen iniciales y p_1 la presión que reducía el volumen v_0 a su mitad v_1, Regnault estableció que la relación: $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$ era distinta para cada gas y cambiaba con el valor p_0 de la presión inicial.

El cumplimiento riguroso de la ley de Boyle-Mariotte exige en cambio que:

$$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} = 1$$

para cualquier gas y cualquier valor de p_0, ya que se conserva la temperatura constante. El hidrógeno dió un valor menor que 1, comprimiéndose menos de lo previsto: $p_1 > 2\, p_0$ para $v_1 = \frac{v_0}{2}$, mientras que en los otros gases fué mayor que la unidad

Otros experimentadores operaron a diversas temperaturas con gases diferentes y para presiones más altas y más bajas que una atmós-

fera, llegando a la conclusión de que la ley de Boyle-Mariotte es sólo aproximada, y confirmando las siguientes conclusiones establecidas por Regnault:

1º. A la temperatura ordinaria todos los gases, a excepción del hidrógeno, se comprimen más de lo que indica la ley de Boyle-Mariotte.

2º. Para presiones próximas a una atmósfera las diferencias son bastante pequeñas, como para que, en general, pueda hacerse uso de esta ley

3º. Las diferencias aumentan con la presión; a 30 atmósferas la ley es aproximada en 1/100 para el aire, el ázoe y el hidrógeno, pero no para el CO^2 ni para los gases fácilmente licuables.

Amagat estudió la compresibilidad de numerosos gases entre 1 y 3000 atmósferas, determinando los valores de los productos pv en cada caso.

Los gráficos de la figura 338 representan algunos de los resultados; en ellos se han tomado como abscisas las presiones p y como ordenadas los productos pv. Si el gas cumpliera rigurosamente la ley de Boyle-Mariotte, para cada temperatura, debería tenerse pv = constante, y el gráfico se reduciría a una recta paralela al eje de las presiones (línea punteada). El valor inicial de pv se ha tomado igual a 1.

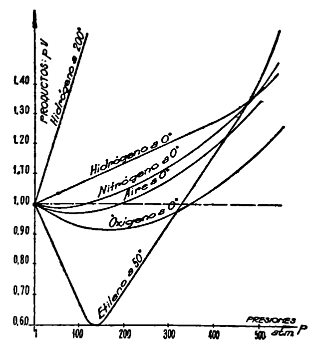


Fig. 338.—*Compresibilidad isotérmica de los gases reales.*

§ 155.— **Manómetros de aire libre.** — Los manómetros son aparatos que se emplean para medir presiones.

El más simple de ellos es el *manómetro de aire libre,* que consta de un tubo en U con mercurio u otro líquido (figura 339). Su funcionamiento se basa en el teorema general de la hidrostática. Si la presión p da lugar a un desnivel h entre ambas ramas, debe tenerse, llamando H a la presión atmosférica y ρ al peso específico del líquido.

$$p = H + h\rho \quad \text{[fig. 339 a]} \qquad [4]$$

El desnivel h *mide,* pues, en altura del líquido empleado, el exceso de la presión del recipiente conectado al manómetro, sobre la presión atmosférica.

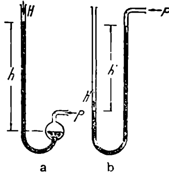


Fig. 339.—*Manómetros de aire libre.*

Si el líquido es mercurio, para un desnivel h = 76 cm la presión es: p = H + 76 cm, o sea, prácticamente, 2 atmósferas. La rama abierta del tubo de Mariotte constituye un manómetro de este tipo.

Si el nivel del líquido en la rama abierta es menor que en la conectada al recipiente con gas (figura 339 b), la presión p' de éste, resulta ser:

$$p' = H - h'\rho \qquad [5]$$

En este caso h' medirá en altura de líquido lo que le falta a p' para igualar a la presión atmosférica.

Usando mercurio, si el desnivel es $h' = 22$ cm, la presión en altura de este líquido resulta: 76 cm. — 22 cm. = 54 cm; lo que equivale a 54 × 13,6 = 734,4 gr/cm², y también a

$$\frac{54}{76} = 0{,}71 \text{ atmósfera.}$$

Empleando líquidos diversos la misma presión se mide por alturas diferentes que cumplen la relación general:

$$p = h_1\,\rho_1 = h_2\,\rho_2 = h_3\,\rho_3$$

Una presión de una atmósfera, es equilibrada por una columna de mercurio de 76 cm y vale:

$$H = 76 \times 13{,}6 = 1033\ \frac{gr}{cm^2}$$

La altura de agua equivalente es 1033 cm, aceptando que el peso

específico del agua es $1 \frac{gr}{cm^3}$ pues: $1033 \text{ cm} \times 1 \frac{gr}{cm^3} = 1033 \frac{gr}{cm^2}$

Si se empleara ácido sulfúrico, de peso específico $\rho = 1{,}848 \frac{gr}{cm^3}$ la columna tendría una altura:

$$h = \frac{76 \times 13{,}60}{\rho} = 76 \times \frac{13{,}60}{1{,}848} = 559 \text{ cm}$$

Cambiando los líquidos pueden tenerse manómetros más o menos sensibles. Una variación de 76 cm para el mercurio, equivale a otra de 10,33 metros para el agua y a 5,624 m para el ácido sulfúrico, pero los tres valores miden la misma presión (una atmósfera)

§ 156. — **Manómetros de aire comprimido.** — Su funcionamiento se basa en la ley de Boyle-Mariotte. Si en la rama corta del tubo de Mariotte marcáramos las presiones que llevan el mercurio a cada nivel, tendríamos transformado el tubo en un manómetro de aire comprimido. La figura 340 muestra una de estos aparatos graduado para presiones superiores a una atmósfera. No necesita tubos largos, como el manómetro de aire libre, para presiones elevadas. En cambio, presenta el inconveniente de que las divisiones se van haciendo cada vez más próximas entre sí al crecer la presión, disminuyendo la posibilidad de apreciar pequeñas variaciones.

Figura 340. — *Manómetro de aire comprimido.*

§ 157.—**Manómetro de Mac Leod para pequeñas presiones.**—Se lo emplea para medir presiones de recipientes en que se ha hecho el vacío.

Consta esencialmente de un tubo AB cuyo volumen se conoce exactamente, que lleva en su parte superior las respectivas divisiones, y de otro tubo vertical CD que se comunica con el recipiente R cuya presión *p se busca.* (Fig. 341).

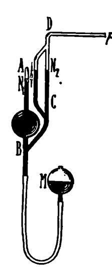


Fig. 341. — *Manómetro de Mc. Leod para pequeñas presiones.*

Por su parte inferior ambos tubos comunican con otro flexible ligado a un recipiente con mercurio.

Levantando este último, el mercurio llega al enrase B, encerrando en el tubo AB un volumen *V*, que está a la presión p buscada.

Elevando más el recipiente M, este gas encerrado reduce su volumen al valor v_1, marcado por el nivel N_1 en el tubo AB.

El nivel del mercurio llega entonces a N_2 en el tubo BC; si h es la

diferencia entre los niveles N_1 N_2, se tiene de acuerdo a la ley de Boyle-Mariotte:

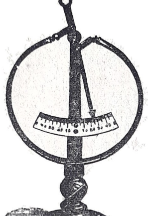


Fig. 342.—*Manómetro metálico de Bourdon.*

$$p\ V = (p + h)\ v_1$$

de donde:

$$p = h \frac{v_1}{V - v_1} \qquad [6]$$

Siendo v_1 muy pequeño, comparado con V (por ejemplo un milésimo), se puede expresar con suficiente aproximación:

$$p = h \frac{v_1}{V} \qquad [7]$$

La graduación del tubo AB da directamente la relación $\frac{v_1}{V}$

§ 158. — **Otros manómetros.** — 1. — *El manómetro metálico de Bourdon,* representado en la figura 342, consta de un tubo de sección elíptica, al que la presión tiende a ensanchar dándole sección circular.

Este cambio de sección hace aumentar su radio de curvatura, desplazando los extremos y produciendo la rotación de la aguja que se observa sobre una escala.

Se gradúan por comparación con un manómetro de mercurio.

Estos manómetros son corrientemente empleados en las calderas de máquinas a vapor, recipientes de compresores y en numerosos instrumentos de aplicación práctica.

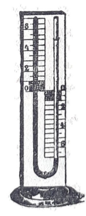


Fig. 343.—*Barómetro truncado. (Manómetro para presiones bajas).*

2. — El *barómetro truncado* es un manómetro usado para medir pequeñas presiones.

Un tubo en U con su rama cerrada llena de mercurio, de unos 20 cm de altura, colocado bajo una campana en que se hace el vacío, permite medir presiones del orden del mm. de mercurio.

El desnivel mide la presión ya que en la cámara barométrica la suponemos nula.

Comienza a marcar cuando la presión es inferior a la altura del tubo.

§ 159. — **Bombas hidráulicas a émbolo.** — Las bombas son aparatos destinados a elevar líquidos. Las más antiguas, ideadas para extraer agua de las napas subterráneas, son las de émbolo, que, según la colocación del cuerpo de bomba con respecto al nivel del líquido a elevar, se clasifican en *aspirantes, impelentes* y *aspirantes impelentes.*

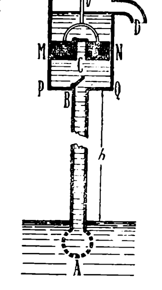


Fig. 344.—*Bomba aspirante.*

1. *Bomba aspirante.* — Está representada en esquema en la figura 344.

El pistón MN con una válvula C que se abre de abajo hacia arriba, se mueve en el interior de un cilindro metálico, haciendo variar periódicamente el volumen de la parte MNPQ por su ascenso y descenso.

La base del cilindro tiene una válvula *B* que se abre también de abajo hacia arriba, y que obtura la comunicación con el tubo de aspiración AB que llega hasta el nivel del agua a elevar.

El funcionamiento se explica en base a la ley de Boyle-Mariotte, y a la acción de la presión atmosférica que actúa sobre la superficie del agua.

Imaginemos inicialmente el pistón MN en el fondo PQ del cilindro y supongamos que se desplace hacia arriba. El volumen MNPQ comprendido entre el pistón y el fondo del cilindro aumenta, y, en su interior la presión se hace menor que la atmosférica, dando lugar a que se levante la válvula B, y deje pasar, primero el aire contenido en AB, y después al líquido que sube empujado por la presión de la atmósfera que actúa en A.

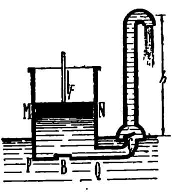


Fig. 345.—*Bomba impelente.*

La altura máxima a que se puede elevar el agua es teóricamente de 10.33 metros (altura equivalente a una atmósfera), y prácticamente de alrededor de 8 metros, pues la imperfección de los ajustes y las resistencias del agua al movimiento alejan la situación real de la teórica.

2. *Bomba impelente.* — En este tipo de bomba el cilindro está dentro del agua y tiene en su parte inferior la válvula

B que permite la entrada del líquido abriéndose de abajo hacia arriba (fig. 345) cuando se levanta el émbolo o pistón MN.

Este émbolo que es macizo, empuja al agua contenida en el cilindro haciéndola subir por el tubo CD.

Una válvula C impide que el agua vuelva al cilindro después de pasar por ella.

Con esta bomba se puede elevar el agua a más de 10.33 metros, limitándose su altura de bombeo por el valor de la fuerza aplicada F, el cierre de las válvulas, el ajuste del pistón y la resistencia de los materiales que la forman.

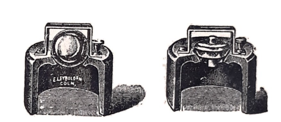


Fig. 346.—*Modelos de válvulas de bombas.*

Si h es la altura a que se eleva el líquido, ρ su peso específico y S la sección del émbolo, la fuerza F de equilibrio es:

$$F = h \cdot \rho \cdot S \qquad [8]$$

El ajuste del émbolo contra las paredes del cilindro se consigue mediante aros de cuero.

Las válvulas más usadas son de los tipos que indica la figura 346.

3. *Bomba aspirante-impelente.* — Resulta de la combinación de los dos tipos anteriores; la figura 347 la representa en esquema.

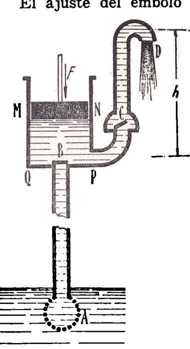


Fig. 347.—*Bomba aspirante-impelente.*

Por el tubo de aspiración AB sube el agua empujada por la presión atmosférica cuando se levanta el émbolo MN; al bajar éste el agua contenida en el cilindro es impulsada por el tubo CD hacia arriba.

4. *Cámara de aire - Bomba de incendio.* — En los tres modelos de bombas mencionados la salida del líquido es discontinua: en la bomba aspirante sale agua cuando sube el émbolo y en la impelente cuando baja.

Para conseguir una salida continua se coloca en el tubo de impulsión de estas últimas, un recipiente cerrado, con aire. El agua impulsada por el émbolo penetra en ese recipiente y en parte comprime el aire; al cesar la presión del émbolo el aire comprimido sigue por un tiempo empujando al líquido por el tubo de salida.

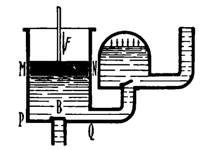
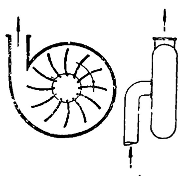


Fig. 348.—*Bomba de incendio.*

Cuando cesa esta acción del aire, vuelve el émbolo a empujar y así sucesivamente, teniéndose una salida sin interrupción. Se aplica este dispositivo en la *bomba de incendio* (fig. 348).

Para tener mayor regularidad en la salida, dos bombas aspirantes-impelentes actúan alternativamente, manejadas por brazos de una misma palanca y envían el agua a la cámara de aire.

§ 160.—**Bombas centrífugas.** — Tienen en la actualidad mucha aplicación las bombas centrífugas. Se caracterizan por poseer un sistema de paletas que, animadas de rápido movimiento de rotación, arrastran al líquido imprimiéndole una velocidad tangencial elevada.



El flúido fluye del centro hacia la periferia del cuerpo de bomba por efecto de la fuerza centrífuga, y allí sale en dirección tangencial por el tubo de impulsión (fig. 349 a y b).

La figura 349 c muestra un equipo de bomba accionada por un motor eléctrico.

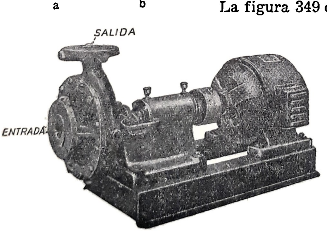


Fig. 349 a. b. c.—*Esquema y bomba centrí fuga.*

La altura que alcanza el líquido depende de la velocidad de rotación y de la sección y forma de las cañerías. Se utilizan corrientemente velocidades de rotación de

1500 a 3000 revoluciones por minuto, y se obtienen alcances en altura hasta 45 metros con caudales de 8000 litros por hora.

Se entiende que la potencia del motor tendrá que ser suficiente para producir este aumento de energía potencial de la masa líquida.

§ 161. — **Sifón.** — Es un instrumento formado por un tubo acodado con dos ramas desiguales, que sirve para transvasar líquidos, (figura 359).

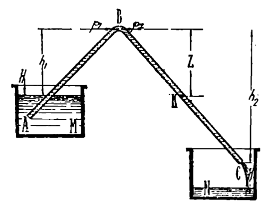


Fig. 350.—*Sifón para transvasar líquidos.*

Colocada la rama corta AB en un vaso M y lleno el sifón de líquido, éste comienza a derramarse por *C* en el vaso N.

El movimiento del líquido termina cuando su nivel en M llega al extremo A del sifón. Entonces entra el aire y el sifón se descarga.

Para cargar o cebar el sifón hay que aspirar el líquido por el extremo C, usándose modelos especiales para líquidos tóxicos o cáusticos.

La explicación del funcionamiento se hace en base al teorema general de la hidrostática y la acción de la presión atmosférica.

En la sección que pasa por B actúan dos presiones p_1 de izquierda a derecha y p_2 de derecha a izquierda.

Sus valores son:

$$p_1 = H - h_1 \cdot \rho$$

$$p_2 = H - h_2 \cdot \rho$$

Como $h_2 > h_1$, se comprende que $p_1 > p_2$.

Siendo diferentes las presiones, no hay equilibrio, marchando el líquido de B hacia C para derramarse en el vaso N. La diferencia de presiones es:

$$p_1 - p_2 = [h_2 - h_1]\ \rho$$

El razonamiento puede repetirse para un punto cualquiera tal como el *K*, cuyo desnivel con *B* es *z*.

La presión de arriba hacia abajo es:

$$p_1' = H - h_1\ \rho + z\ \rho$$

y la de abajo hacia arriba:

$$p_2' = H - (h_2 - z)\,\rho = H - h_2\,\rho + z\,\rho$$

Restando se tiene:

$$p_1' - p_2' = (h_2 - h_1)\,\rho \qquad [9]$$

que es el mismo valor de $p_1 - p_2$.

En cualquier sección del sifón, hay una diferencia de presión constante que hace marchar el líquido y cuyo valor es el indicado.

El sifón puede funcionar aunque sobre los líquidos no actúe la presión atmosférica H; reemplazando a ésta por una presión cualquiera p_0 se llega al mismo valor para la diferencia de las presiones en una sección:

$$p_1 - p_2 = (h_2 - h_1)\,\rho$$

Parecería lógico aceptar que el sifón funcionara aunque la presión p_0 fuese nula, es decir, en el vacío.

Pero, en realidad, haciéndolo funcionar bajo la campana de una máquina neumática (ver § 162) llega un momento en que la columna se interrumpe, descargándose el sifón cuando entra en ebullición el líquido, por ser su tensión de vapor igual a la presión que soporta. La condición puede expresarse así:

$$\text{tensión de vapor} < p_0 - h_2\,\rho$$

§ 162.— **Bombas neumáticas o bombas de vacío.** — Son aparatos destinados a producir disminuciones de presión (vacío), y en principio son bombas que aspiran los gases encerrados en recipientes.

En la ciencia se aprecia el grado de vacío por la presión final obtenida, que en la actualidad llega a ser del orden de 0,0000001 mm de Hg (10^{-7} mm).

En la técnica se suele expresar por la diferencia con la presión exterior; así, por ejemplo, un vacío de 750 mm significa una presión final de 10 mm de Hg.

Existen distintos tipos de bomba o máquinas neumáticas con los cuales se obtienen los siguientes vacíos finales:

Trompa de agua	hasta	10	mm	(10^1)
Bombas a émbolo manejadas a mano	,,	1	,,	(10^0)
Bomba de mercurio (vacío barométrico)	,,	0,1	,,	(10^{-1})
Bombas de émbolo con motor	,,	0,01	,,	(10^{-2})
Bombas rotativas de 1 cuerpo	,,	0,002	,,	(2×10^{-3})
Bombas rotativas de 2 cuerpos	,,	0,000 01	,,	(10^{-5})
Bombas rotativas moleculares	,,	0,000 01	,,	(10^{-5})
Bombas de difusión de vapor de mercurio	,,	0,000 001	,,	(10^{-6})
Bombas de difusión de aceite	,,	0,000 000 3	,,	(3×10^{-7})

§ 163. — Trompa de agua. — Se obtiene una disminución de presión por el arrastre del aire que produce un rápido chorro de agua (fig. 351).

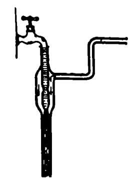


Fig. 351.—*Trompa de agua.*

El vacío obtenido depende de la velocidad de salida del agua, y, por lo tanto, de la presión en la cañería. La teoría se desarrolla en base al teorema de Bernouilli (§ 136). Se utiliza esta bomba en aquellas aplicaciones en que no es necesario un vacío muy elevado.

§ 164. — Máquina neumática a émbolo. — Consta esencialmente de un cilindro en cuyo interior se mueve un pistón o émbolo que extrae el aire del recipiente en que se desea hacer el vacío. En los modelos corrientes de laboratorio se dispone de una *platina* o placa plana de vidrio esmerilado, sobre la cual se apoya una campana de borde bien plano, también esmerilado, que se ajusta sobre la platina con grasas especiales.

El émbolo debe desplazarse dentro del cilindro, sin permitir filtraciones de aire, es decir, con un ajuste perfecto. En cilindros de vidrio se utilizan aros de cuero aceitado y en cilindros de metal con émbolos también de metal una capa de aceite constituye un cierre adecuado.

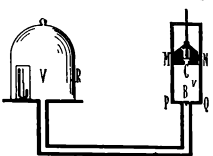


Fig. 352.—*Esquema de máquina neumática a émbolo.*

La figura 352 muestra un esquema de máquina neumática a émbolo.

Se trata de extraer el aire del recipiente *R* cuyo volumen es V, incluído el del tubo de comunicación. *B* y *C* son válvulas colocadas, respectivamente, en el cilindro y en el émbolo; por la primera llega el aire al cuerpo de bomba y por la segunda es expulsado al exterior.

El funcionamiento se comprende fácilmente como aplicación de la ley de Boyle-Mariotte.

Al subir el émbolo, el volumen *MNPQ* aumenta, disminuyendo entonces la presión, que al llegar a ser inferior a la del gas en R provoca la apertura de la válvula B. Continuando el movimiento ascendente del émbolo disminuye la presión en todo el volumen formado por el recipiente y el cilindro.

Al comenzar el descenso, la válvula *B* se cierra, no modificándose la presión en *R*, mientras aumenta en el cilindro.

Cuando en éste la presión supera a la exterior, se abre la válvula C y el aire es expulsado. La repetición de este proceso provoca la disminución progresiva de la presión en R. Su valor se puede medir con un barómetro truncado (§ 158 [2]) colocado dentro de la campana o en una campana auxiliar conectada a R.

§ 165. — **Cálculo de la presión final.** — Sea p_o la presión inicial, V el volumen del recipiente *R*, y *v* el volumen barrido por el émbolo. Imaginemos al émbolo en la parte inferior de su recorrido; tenemos así un volumen de gas V a la presión p_o. Levantado hasta el final de su carrera, la misma masa de gas ocupa el volumen $V + v$, habiendo disminuído la presión al valor p_1. Aplicando la ley de Boyle-Mariotte, se verifica:

$$p_0 V = p_1 [V + v] \qquad [10]$$

de donde deducimos:

$$p_1 = \frac{V}{V + v} p_0 \qquad [11]$$

Al bajar nuevamente el émbolo volvemos a la posición inicial con un volumen de gas V a la presión p_1. Levantando nuevamente el émbolo tendremos presión p_2 y volumen $V + v$, en forma tal que:

$$p_1 V = p_2 (V + v)$$

luego:

$$p_2 = \frac{V}{V + v} p_1 \qquad [12]$$

Se observa que cada golpe de émbolo reduce la presión en la relación $\frac{V}{V + v}$. Sustituyendo en [12] el valor de p_1 dado por la [11]

$$p_2 = \frac{V}{V + v} \cdot \frac{V}{V + v} p_0 = \left(\frac{V}{V + v}\right)^2 p_0 \qquad [13]$$

Llegaremos así, para *n* golpes de émbolo, a la expresión

$$p_n = \left(\frac{V}{V + v} \right)^n p_0$$

Esta fórmula nos dice que, teóricamente, la presión puede reducirse a un valor tan pequeño como se quiera para un número suficientemente grande de golpes de émbolo.

Así por ejemplo: si $V = 10$ dm³ y $v = 0{,}5$ dm³, después de 10 golpes de émbolo la presión inicial de 760 mm de Hg se reduciría a:

$$P_{10} = \left(\frac{10}{10{,}5} \right)^{10} 760 = 466 \text{ mm}$$

y para 100 golpes de émbolo la presión final sería:

$$P_{100} = \left(\frac{10}{10{,}5} \right)^{100} 760 = 5{,}8 \text{ mm}$$

En la práctica, las filtraciones de aire, imposibles de evitar en absoluto, impiden obtener los resultados que da el cálculo.

Además, no es posible llegar a una presión inferior a cierto valor límite p_l, a causa del *espacio nocivo*. Llámase así al volumen que queda entre la cara inferior del émbolo y la base del cilindro, cuando aquél está en la parte más baja de su recorrido. Razones constructivas impiden reducirlo a cero adaptando exactamente ambas superficies.

Sin embargo, en la industria se utilizan bombas a émbolo accionadas por motor, cuya eficacia es bastante mayor a la de los tipos corrientes de laboratorio.

Llamando ε al espacio nocivo, puede establecerse que la presión límite p_l se obtiene cuando el volumen v de aire encerrado a dicha presión en todo el cilindro, reducido al volumen ε, sólo alcanza una presión igual a la exterior p_0. En este caso la válvula C no se abre y el pistón sube y baja sin extraer más aire del recipiente. El valor de p_l se calcula aplicando la ley de Boyle-Mariotte:

$$p_l \, v = p_0 \, \varepsilon$$

$$p_l = p_0 \frac{\varepsilon}{v} \qquad [15]$$

Puede reducirse el efecto del espacio nocivo poniendo dos cilindros en serie, de modo que, el primero aspire el aire que sale del segundo, y éste el del recipiente *R*. [En este caso: $p_l = p_0 \times \left(\frac{\varepsilon}{v} \right)^2$]

Son comunes las máquinas neumáticas con dos cuerpos de bomba que una llave especial ("robinete de Babinet") permite conectarlos, sea directamente al recipiente *R*, sea en serie, para obtener un vacío más completo.

§ 166. — **Bomba de mercurio.** — Esta bomba sólo tiene actualmente valor histórico. El principio de funcionamiento se comprende fácilmente observando el esquema de la fig. 353. Al bajar el recipiente de la derecha desciende el nivel del mercurio en el bulbo A, produciendo el vacío de la cámara barométrica. Al ponerlo en comunicación con el recipiente en el cual se desea hacer el vacío, se obtiene una disminución de presión. Levantando nuevamente el recipiente de la derecha se desaloja el gas de *A* por medio de la llave de tres vías M, a través del tubo *e*. Repitiendo la operación muchas veces se llega a un vacío apreciable, aunque el método es largo y molesto. En esta bomba el mercurio reemplaza al pistón de las bombas de émbolo.

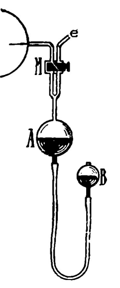


Fig. 353.—*Bomba de mercurio.*

§ 167. — **Bomba rotativa.** — En la actualidad se utilizan muy frecuentemente las bombas neumáticas rotativas, que funcionan accionadas por un motor eléctrico y se encuentran colocadas dentro de una caja con aceite que sirve a la vez como lubricante y asegura el cierre perfecto de las juntas. En la figura 354 está representado un equipo completo, en que se ve el motor, la caja de la bomba y una platina con campana de vacío adaptada al tubo de aspiración, dispuesto para la comprobación del principio de Arquímedes.

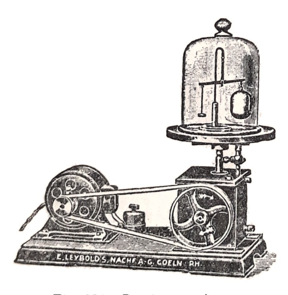


Fig. 354.—*Bomba rotativa.*

La figura 355 muestra dos cortes de la bomba, uno transversal y otro longitudinal.

El cuerpo de bomba es cilíndrico y dentro de él gira excéntricamente otro cilindro más pequeño con una generatriz en contacto con el anterior. Dos paletas colocadas en un corte diametral del cilindro giratorio son oprimidas por resortes contra las paredes del cuerpo de bomba de manera que lo dividen en dos cámaras *a* y *b*.

Al girar en el sentido que indica la flecha aumenta el volumen de la cámara *a* comunicada directamente con el tubo de

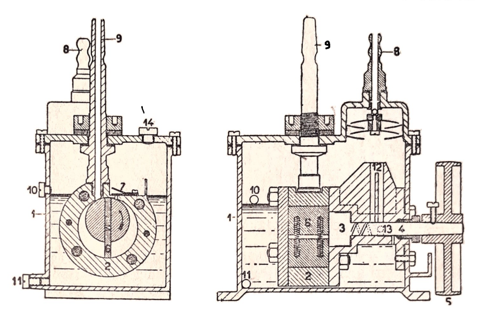


Fig. 355.—*Cortes de una bomba rotativa.*

aspiración (A) y disminuye el de la cámara (b), donde aumenta la presión del gas que es expulsado a través de la válvula (v) (fig. 356, I y II).

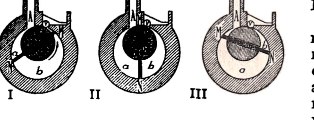


Fig. 356.—*Esquema de funcionamiento de una bomba rotativa.*

Continuando la rotación, constantemente está comunicada con el tubo de aspiración la cámara que aumenta de volumen (fig. 356 - III).

En algunos casos se emplean bombas en que la válvula *v* está comunicada, con un segundo cuerpo de bomba idéntico. Se mejora así notablemente el vacío obtenido.

§ 168.—**Bombas de alto vacío.**—Son bombas de alto vacío, las que permiten alcanzar presiones finales comprendidas entre el milésimo y el diez millonésimo de milímetro de mercurio (10^{-3} a 10^{-7} mm). Estos vacíos tan elevados se necesitan, no sólo para trabajos en los laboratorios de investigación, sino también en algunas industrias, como, por ejemplo, en la fabri-

cación de lámparas para radiocomunicaciones y tubos para rayos X.

Estas bombas solo funcionan en serie con otra bomba auxiliar que produce un vacío que llamamos preliminar.

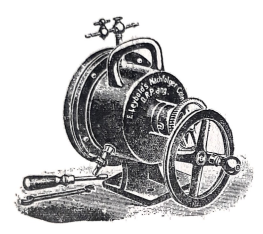


Fig. 357.—*Bomba rotativa a mercurio, de Gaede, para vacío elevado.*

Podemos mencionar como más importantes:

a) *Bomba rotativa a mercurio,* de Gaede, hoy ya poco usada (fig. 357).

b) *Bomba rotativa molecular* de Gaede. Su funcionamiento se basa en el arrastre de moléculas producido por un rotor que gira a muy alta velocidad (hasta 12000 revoluciones por minuto). Este rotor presenta ranuras que aumentan el efecto de aspiración. Un nuevo modelo, modificado por Siegbahn, lleva las ranuras en la parte fija y funciona a 6000 revoluciones por minuto.

El principio de funcionamiento se entiende con el esquema de la figura 359. El vacío que se obtiene depende del vacío preliminar y de la velocidad de rotación. Así, por ejemplo: para

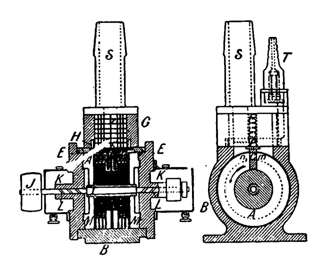


Fig. 358.—*Bomba rotativa molecular de Gaede, para alto vacío.*

12000 rev. p. min. y vacío preliminar 0,02 mm de Hg se obtiene una presión final de 3×10^{-7} mm.

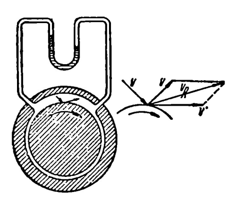


Fig. 359.—*Principio de funcionamiento de la bomba rotativa molecular.*

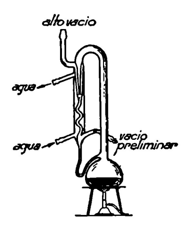
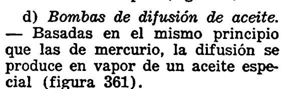


Fig. 360.—*Bomba de difusión de vapor de mercurio.*

c) *Bombas de vapor de mercurio* a difusión, de Gaede, y a condensación, de Langmuir. En ellas el arrastre del gas se produce por un chorro de vapor de mercurio, en un caso por difusión del gas dentro del vapor y en otro por la condensación del vapor (fig. 360).



d) *Bombas de difusión de aceite.* — Basadas en el mismo principio que las de mercurio, la difusión se produce en vapor de un aceite especial (figura 361).

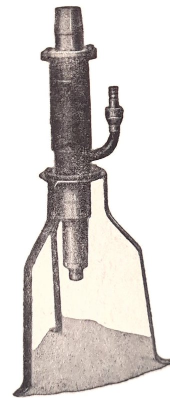


Fig. 361.—*Bomba de difusión de aceite.*

e) *Vacío por absorción* en carbón de coco. Se obtiene aprovechando la extraordinaria capacidad de absorción del carbón de madera, a baja temperatura, cuando ha sido previamente desgasado. Su utilización data de las experiencias de Dewar, quien aconsejó el uso del carbón que se obtiene con cáscaras de coco. Durante la producción del vacío preliminar se calienta a unos 400° para que quede desprovisto de gas y luego al enfriarlo con aire líquido se obtienen vacíos del orden del milésimo de mm de mercurio. Las bombas mo-

leculares y de difusión han desalojado el uso de este procedimiento.

§ 169. — **Bombas de compresión.** — Una máquina análoga a la neumática, pero con las válvulas que se abren en sentido opuesto, sirve para aumentar la presión, constituyendo una *bomba de compresión.*

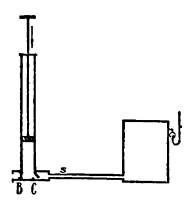


Fig. 362.—*Bomba de compresión.*

Las bombas rotativas expulsan aire por el tubo de salida (fig. 363) y en algunos modelos se puede utilizar este aire para diversas aplicaciones.

El modelo de bomba de la figura 362 sirve para hacer vacío y compresión. Al levantar el émbolo la válvula B se abre aspirando el aire; al bajarlo se cierra B y se abre C, saliendo el aire comprimido por S.

Se puede así comprimir aire en un recipiente; tal cosa sucede cuando se infla un neumático de bicicleta o de automóvil.

Acoplando a una bomba de tipo análogo un motor eléctrico se tiene un compresor con el que se realizan numerosas aplicaciones técnicas.

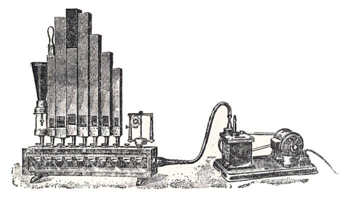


Fig. 363.—*Las bombas rotativas de vacío sirven como bombas de compresión utilizando el aire de escape. En la figura aparece una de ellas aplicada al funcionamiento de tubos sonoros.*

CAPÍTULO XIII

DINÁMICA DE GASES - RESISTENCIA AL MOVIMIENTO EN LOS FLÚIDOS

§ 170. — **Teorema general de la hidrodinámica aplicado a los gases.** — En el § 135 se ha estudiado el teorema general de la hidrodinámica aplicado a los líquidos perfectos.

En su demostración se supuso la incompresibilidad del líquido, lo cual implica *densidad constante,* mientras no cambie la temperatura.

En los gases, se demuestra también el teorema general de la hidrodinámica suponiendo una masa de gas en movimiento estacionario; pero no es posible admitir la incompresibilidad, pues hemos visto que la densidad es función de la presión (§ 153).

La *ecuación de continuidad* es la ecuación por la cual se establece que la masa de flúido no varía, es decir, que la masa que atraviesa una sección de un filete es la misma que atraviesa cualquier otra sección del mismo filete y durante el mismo intervalo de tiempo. Esta ecuación, que en los líquidos adquiere forma sencilla, en los gases es bastante más compleja. Además, en el teorema general figura para los gases un término en que se vincula la variación de presión con la variación de volumen.

Sólo en el caso de suponer una circulación de gas a *volumen constante* podrá aplicarse la expresión del teorema de Bernouilli (§ 135):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2\,g} + h = \text{constante} \qquad [1]$$

en la cual es p la presión hidrostática, ρ el peso específico, v la velocidad y h la altura del punto considerado en la masa flúida, contada a partir de un plano horizontal de comparación.

Una experiencia curiosa que podemos explicar aplicando este teorema es la siguiente:

En el aparato de la figura 364, soplando fuertemente por el tubo MN, se observa que, contrariamente a lo que pudiera creerse, la placa *AB* móvil sube hasta tocar la *CD.*

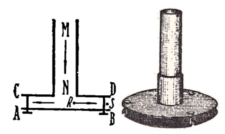


Fig. 364.—*Paradoja aerodinámica de vacío con el aparato de Clement-Desormes.*

La explicación es sencilla aceptando aplicable el teorema de Bernouilli. En efecto: como la sección de los filetes flúidos crece hacia la periferia, la velocidad del mismo disminuye, de acuerdo a la ecuación o ley de continuidad, teniéndose que la velocidad en el punto R es mayor que en el S.

En el borde la presión hidrostática es igual a la presión exterior p_o que actúa sobre la cara inferior de *AB*. Aplicando el teorema de Bernouilli a dos puntos tales como R y S:

$$\frac{p_R}{\rho} + \frac{v_R^2}{2g} + h_R = \frac{p_S}{\rho} + \frac{v_S^2}{2g} + h_S \qquad [2]$$

como $h_R = h_s$ y $p_s = p_o$, resulta:

$$\frac{p_R}{\rho} + \frac{v_R^2}{2g} = \frac{p_o}{\rho} + \frac{v_S^2}{2g} \qquad [3]$$

y como, además, dijimos que $v_R > v_s$, tendrá que ser:

$$p_R < p_o \qquad [4]$$

quiere decir que la presión que actúa en la cara superior de la placa AB es menor que la que actúa sobre la cara inferior. Habrá una fuerza resultante dirigida hacia arriba; cuando supere al peso, la placa se elevará.

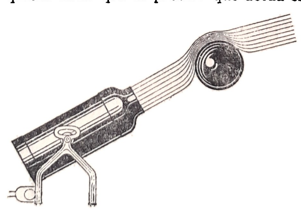


Fig. 365.—*Efecto de la presión aerodinámica.*

Un razonamiento análogo explica que la pequeña esfera de celuloide de la figura 365 se sostenga como adherida a la

corriente emitida por el tubo, pues en el aire que está en contacto con ella en la parte superior la presión hidrostática es menor que en el de la parte inferior, pues allí la velocidad y, por lo tanto, el término $\frac{v^2}{2g}$, son mayores.

§ 171. — **Viscosidad en gases.** — En los gases reales se produce, como en los líquidos reales, una resistencia al deslizamiento en la superficie de separación de dos capas animadas de distinta velocidad.

En un tubo, por cuyo interior circula gas, la velocidad no es la misma en todos los puntos de una sección transversal, pues, en contacto con las paredes, la velocidad es nula, y aumenta hacia el eje del conducto.



Fig. 366.—*Efecto de la viscosidad del gas en la distribución de velocidades.*

Se define el coeficiente de viscosidad η en forma análoga al de los líquidos.

De las determinaciones experimentales, resulta que el coeficiente de viscosidad del aire a 0° es:

$$\eta = 0.000172 \frac{g}{\text{cm seg}}$$

es decir, unas 100 veces menor que el del agua a la misma temperatura

§ 172. — **Resistencias al movimiento en los flúidos.** — Cuando un sólido se desplaza en el interior de un flúido, aparecen fuerzas que se oponen al movimiento (resistencias). Estas resistencias son debidas a dos causas: la viscosidad y la reacción de inercia del flúido que el sólido desplaza en su movimiento.

La primera origina fuerzas que son, en cada punto, tangenciales, y la segunda, fuerzas normales a la superficie del sólido. Se las llama resistencia de rozamiento y resistencia de presión, respectivamente.

En el valor de la resistencia total de rozamiento influye fundamentalmente la superficie del cuerpo y no su forma. En la resistencia de presión influye, en cambio, la forma.

En los cuerpos que se desplazan en la superficie de los líquidos adquiere especial importancia la resistencia debida al conjunto de ondas que forma el cuerpo en su movimiento (caso de un navío).

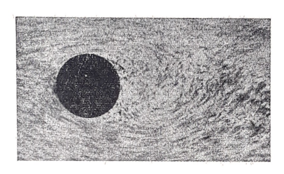
En general, podemos decir que la velocidad es lo que de-

cide sobre el tipo de resistencia que adquiere más importancia.

Para muy pequeñas velocidades interesa casi exclusivamente la resistencia de rozamiento, que es proporcional a la velocidad y al coeficiente de viscosidad del flúido. Así, para una esfera de radio r, moviéndose con velocidad v en un flúido cuyo coeficiente de viscosidad es η, la resistencia es:

$$f = 6\ \pi\eta r v \text{ (fórmula de Stokes)} \qquad [5]$$

Si la velocidad crece, llega a adquirir fundamental importancia la resistencia de presión. Entonces se forman torbellinos detrás del móvil, que dan por resultado un desequilibrio entre la fuerza que actúa en la cara de adelante y la que actúa en la cara de atrás del cuerpo (figura 367). En este caso la resistencia al movimiento resulta proporcional al cuadrado de la velocidad (Ley de Newton), prácticamente independiente de la viscosidad y proporcional a la superficie que presenta el cuerpo normalmente a la dirección del movimiento:



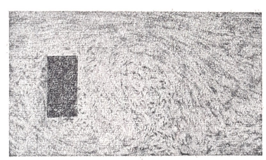


Fig. 367. — *Líneas de corriente y torbellinos en el movimiento de una placa y un cilindro dentro de un flúido.*

$$F = kSv^2 \qquad [6]$$

El coeficiente k, para el aire a presión normal y para velocidades comprendidas entre 2 y 25 $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$, resulta aproximadamente:

$$k = 0.079\ \frac{Kgr\ seg^2}{m^4}$$

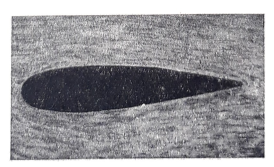


Fig. 368. — *Perfil aerodinámico que reduce la formación de torbellinos y por lo tanto la resistencia al movimiento.*

Cuando la velocidad alcanza a ser próxima a la velocidad del sonido dentro del flúido, el fenóme-

no es mucho más complejo y la resistencia al movimiento crece.

Como para velocidades medias la resistencia aumenta por la formación de torbellinos, en los casos en que se desea reducir su valor al mínimo, se dan al móvil formas adecuadas (perfiles aerodinámicos).

En la fig. 368 se observa un perfil en esas condiciones.

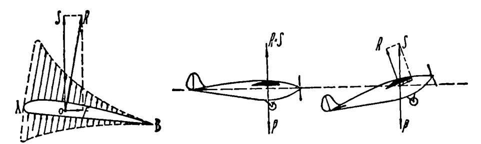


Fig. 369.—*Distribución de presiones en el ala de un avión y fuerzas que actúan sobre él durante el vuelo. La sub-presión en la cara superior del ala da la mayor parte de la fuerza de sustentación.*

El sentido conveniente de la marcha es el que corresponde al avance con la parte más ancha hacia adelante.

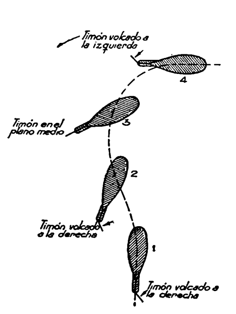


Fig. 370.—*Funcionamiento del timón en un dirigible. La resistencia del aire tiene una resultante sobre el timón, que produce una rotación alrededor de un eje baricéntrico.*

En los dirigibles modernos se adopta este perfil, que recuerda al de los peces.

En otros casos, se trata de aprovechar la resistencia al movimiento para obtener estabilidad.

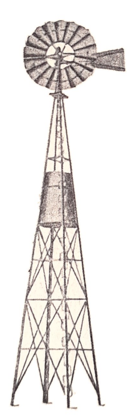
En las alas de los aviones la fuerza de sustentación es consecuencia de la resistencia al movimiento en los flúidos. Pero en ese caso también se elige un perfil tal que no se formen remolinos que originarían fuerzas peligrosas.

El vuelo de un avión se explica del siguiente modo: la hélice gira velozmente en el aire y por el perfil de sus brazos actúa sobre ella una fuerza hacia adelante, que comunica al avión su velocidad. Las alas se encuentran entonces en movimiento dentro de la masa de aire y su forma es

tal que la resistencia del aire tiene una componente vertical hacia arriba (fig. 369) originada por una presión en la cara inferior y una depresión (aspiración o succión), en la cara superior.

El funcionamiento de los timones en todos los tipos de embarcación utiliza también la resistencia al movimiento en los flúidos (fig. 370).

Como los efectos de la resistencia al movimiento dependen, en todos los casos, de la velocidad relativa del sólido con respecto al flúido, se estudian experimentalmente desplazando a éste con respecto al sólido, que está en reposo, y midiendo así las fuerzas que sobre él actúan. Tal es el caso del túnel aerodinámico, de gran aplicación en las fábricas de aviones. Así, se han obtenido también las fotografías reproducidas en las figuras 367 y 368.


Fig. 371.—*Molino de viento.*

El funcionamiento de los molinos de viento se explica por las fuerzas generadas en sus paletas por el aire en movimiento y otro tanto sucede con los *anemómetros,* aparatos destinados a medir la velocidad del viento, formados por cuatro paletas semiesféricas montadas sobre un eje cuyas rotaciones mide un contador de vueltas.

En los modernos helicópteros, hélices montadas sobre ejes verticales y con paletas de dimensiones adecuadas, producen, por reacción en el aire, una fuerza vertical que determina el ascenso y que puede mantener suspendido en posición fija al aparato, equilibrando justamente su peso, usando una conveniente velocidad de rotación.

Los helicópteros pueden así descender lentamente y posarse en el suelo, en espacios reducidos.

§ 173.—**Caída en el aire - Paracaídas.** — Sabemos que la caída de los cuerpos en el vacío se cumple con movimiento uniformemente acelerado.

En el aire, a la acción del peso se agrega la resistencia del aire, que en los cuerpos de dimensiones corrientes crece con el cuadrado de la velocidad. De tal manera, aplicando el principio de masa, podremos escribir:

$$ma = P - F = mg - kSv^2 \qquad [7]$$

siendo k un factor de proporcionalidad (fórm. [6]).

La aceleración es entonces:

$$a = g - \frac{kS}{m} v^2 \qquad [8]$$

Llegará un momento en que la resistencia del aire se equilibra con el peso:

$$P = F = kSv^2 \qquad [9]$$

y a partir de ese instante la velocidad será constante y el movimiento se hará uniforme.

Esa velocidad se llama **velocidad crítica** o **velocidad límite**, y depende de la forma y peso del cuerpo que cae.

De la fórmula [9] se deduce:

$$v = \sqrt{\frac{P}{kS}} \qquad [10]$$

Es clásica la experiencia que consiste en dejar caer varios cuerpos de distinto peso dentro de un tubo (tubo de Newton) (fig. 138).

Se observa que, mientras en el aire cada uno cae con diferente velocidad, en el vacío todos caen simultáneamente.

El paracaídas tiene por objeto limitar la velocidad de caída en el aire a un valor que no resulte peligroso.

Está constituído por un casquete esférico de tela con una abertura pequeña en su parte superior, por donde pasa el aire.

El efecto de esta abertura es mantener al paracaídas con su eje vertical durante el descenso.

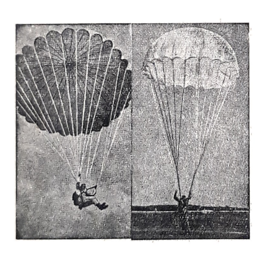


Fig. 372.—*Dos instantes del descenso de un paracaídas.*

Aplicaciones: 1º Calcular la velocidad de caída en aire a 0º de una gota de aceite de 0.1 mm de diámetro y peso específico

$$\rho = 0.91 \frac{gr}{cm^3}$$

Resp. Se aplica la fórmula de Stokes [5]. El movimiento es uniforme a partir del instante en que:

$$P = f = 6\pi\eta\, r\, v.$$

luego la velocidad límite será:

$$v = \frac{P}{6\,\pi\eta r}$$

$$\text{Volumen esfera} = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3 = 0.00052\ \text{mm}^3$$

$$P = 0.00000052\ cm^3 \times 0{,}91\ \frac{gr}{cm^3} = 0.00000047\ gr = 0.00046\ \text{dina}$$

$$\eta_{\text{aire}} = 0.000172\ \frac{g}{cm\ seg}$$

$$v = \frac{0.00046\ dina}{6\,\pi \times 0.000172 \times 0.005\ \dfrac{g\ cm}{cm\ seg}} = 28\ \frac{cm}{seg}$$

2°) Un paracaidista se lanza desde un aeróstato siendo el peso total (peso propio + peso paracaídas) de 100 Kgr. La superficie normal del mismo es 50 m². Calcular la velocidad crítica.

Se aplica, en este caso, la fórmula de Newton

$$F = k\ Sv^2$$

La velocidad crítica es [fórm. 10]:

$$V = \sqrt{\frac{P}{k\ S}} = \sqrt{\frac{100\ \text{Kgr}}{0{,}079 \times 50\ \dfrac{Kgr\ seg^2\ m^2}{m^4}}} = \sqrt{\frac{100}{0{,}079 \times 50}\ \frac{m^2}{seg^2}} =$$

$$= 5{,}04\ \frac{m}{seg}$$

CAPÍTULO XIV

ELASTICIDAD EN LOS SÓLIDOS, LÍQUIDOS Y GASES

§ 174. — **Elasticidad de sólidos.** — Los sólidos reales no son cuerpos rígidos, pues se deforman por la acción de fuerzas exteriores. Las deformaciones originan reacciones internas, llamadas *fuerzas elásticas,* que equilibran a las fuerzas aplicadas. Hemos utilizado esta propiedad al hablar de dinamómetros (§ 16), y se ha mencionado al estudiar el choque de cuerpos elásticos (§ 63). Nos referiremos a la elasticidad en los sólidos isótropos y homogéneos. Son homogéneos los cuerpos cuyas propiedades son las mismas en todos sus puntos, y son isótropos cuando en cada punto las propiedades físicas son idénticas en todas las direcciones.

§ 175. — **Elasticidad por tracción - Ley de Hooke.** — Colocando una carga *P* en el extremo *B* de un alambre fijo en su otro extremo A se constata un alargamiento de Δl.

Siendo l la longitud inicial y s el área de la sección normal del alambre, se comprueba que el alargamiento Δl cumple, para cargas que no pasan de cierto límite, las siguientes leyes:

1º Es proporcional a la carga P.

2º Es proporcional a la longitud l.

3º Es inversamente proporcional a la sección s.

4º El factor de proporcionalidad es un coeficiente k, que depende de la sustancia de que está hecho el alambre.

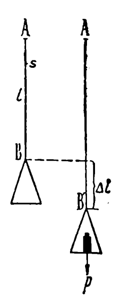


Fig. 373.—*Elasticidad por tracción.*

Puede,pues, escribirse:

$$\Delta l = K \frac{Pl}{s} \qquad [1]$$

El coeficiente *k*, llamado **coeficiente de elasticidad por tracción**, se suele expresar en la forma:

$$K = \frac{1}{E} \qquad [2]$$

Siendo E el **módulo de elasticidad por tracción** (módulo de Young).

La fórmula [1] toma la forma:

$$\Delta l = \frac{Pl}{Es} \qquad [3]$$

Si aumentamos la carga P, se llegará a un valor a partir del cual los alargamientos dejan de ser proporcionales a las cargas. Se ha pasado, pues, el *límite de proporcionalidad*. Hasta este límite, podemos admitir con suficiente aproximación que, retirada la carga, el alambre recobra su longitud inicial.

De la fórmula [3] deducimos:

$$\frac{P}{s} = \frac{E \Delta l}{l} \qquad [4]$$

El cociente $\frac{P}{s} = N$ es la fuerza que actúa por unidad de sección, y la llamaremos **tensión**.

La relación $\frac{\Delta l}{l} = \lambda$ es el alargamiento experimentado por cada unidad de longitud, o sea la **deformación**.

Luego, la fórmula [4] puede escribirse:

$$N = E\lambda \qquad [5]$$

que nos dice que: **Las tensiones son proporcionales a las deformaciones (ley de Hooke).**

Siendo λ un número abstracto, pues es el cociente de dos longitudes, la unidad en que se mide E será **la misma** en que se mide N, o sea:

$$[E] = \frac{Kgr}{cm^2} \text{ ó } \frac{Kgr}{mm^2} \text{ ó } \frac{dina}{cm^2}$$

Puede interpretarse E, en base de la fórmula [5], como la tensión que produce una deformación λ igual a uno, o sea la tensión capaz de duplicar la longitud inicial del alambre. Debe tenerse en cuenta que en la realidad el alambre se rompe antes de alcanzar este alargamiento.

§ 176. — **Límite de elasticidad - Valores de E.** — La ley de Hooke es válida también para un prisma o cilindro cargado en la dirección de su eje con una fuerza uniformemente distribuída sobre su sección transversal.

Con máquinas especiales se miden los alargamientos para cargas crecientes desde cero hasta la rotura.

En la figura 374 se reproduce un gráfico en que están representadas las tensiones en función de las deformaciones. Al principio, desde 0 hasta A, existe proporcionalidad, de modo que la representación gráfica es una recta. En esa zona se puede aplicar la ley de Hooke, y el módulo de elasticidad es una constante.

Fig. 374.—*Representación gráfica del alargamiento en función de la carga, en una barra de acero.*

Pasado el punto A, la barra o alambre se alarga más de lo que proporcionalmente correspondería a las tensiones aplicadas. Llegada la tensión a determinado valor, se produce la rotura (punto B).



Fig. 375.—*Aspecto de una barra de acero después de cargada hasta la rotura por tracción.*

Aparentemente, en la parte final de la curva, a mayores alargamientos han correspondido menores tensiones. En rigor debe tenerse en cuenta que la probeta se estrangula en su parte media, disminuyendo la sección y, por lo tanto, allí la tensión ha aumentado (ver fig. 375), como indica la curva B'.

TABLA XII
VALORES DE E

MATERIAL	E Kgr/cm²	Límite de proporcionalidad Kgr/cm²	Carga de rotura Kgr/cm²
Hierro dulce	2.000.000	1300	3300 a 4000
Acero	2.200.000	2500 a 6000	5000 a 20000
Acero de resortes	2.200.000	8500	hasta 17000
Cobre	1.000.000	—	—
Aluminio	700.000	480	1500
Plomo	50.000	—	125

§ 177. — **Elasticidad por compresión.** — Si sobre las bases del prisma o cilindro recto se aplican presiones normales dirigidas hacia el interior del mismo, decimos que se encuentra sometido a una **compresión**, y observamos que sufre un acortamiento.

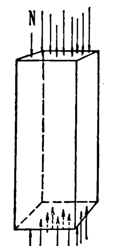


Fig. 376—*Prisma sometido a compresión.*

Las leyes que se establecen experimentalmente son idénticas a las de la tracción, y se observa que para la mayoría de los metales, aleaciones y otras sustancias el valor del módulo de elasticidad por compresión es aproximadamente igual al módulo de elasticidad por tracción.

En algunos materiales (el hormigón, por ejemplo) son bastante diferentes las cargas de rotura por tracción y por compresión, siendo mayores estas últimas.

§ 178.— **Contracción lateral.** — Tanto en las experiencias de tracción como en las de compresión, se comprueba que el prisma (o alambre o cilindro) sometido a esos esfuerzos experimenta también una deformación lateral.

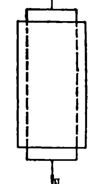


Fig. 377. — *Contracción lateral en la tracción.*

En el caso de tracción se produce una **contracción**, en el caso de **compresión** se produce una **dilatación** lateral.

La contracción λ' por unidad de longitud, en una cualquiera de las dimensiones laterales, se calcula por una fórmula semejante a la [5].

$$\lambda' = \frac{N}{mE} \qquad [6]$$

Siendo N la tensión longitudinal, E el mismo módulo de elasticidad, y m el **módulo de Poisson.**

Este módulo es mayor que 2, y en el acero está comprendido entre 3 y 4.

Así por ejemplo: si una varilla cilíndrica de acero está cargada en condiciones tales que se alarga 1 mm por cada metro de longitud ($\lambda = 0.001$); experimentará una contracción lateral tal que su diámetro disminuye 0,3 micrones por cada milímetro ($\lambda' = \frac{0{\cdot}001}{3}$).

Se comprende fácilmente que el resultado es siempre para la tracción un aumento de volumen y para la compresión una disminución de volumen.

§ 179. — **Compresión uniforme.** — Se obtiene cuando el sólido está sometido a presiones normales a su superficie e iguales en toda su extensión.

En este caso se produce una variación de volumen, de tal manera que el cuerpo deformado es semejante al cuerpo antes de la deformación.

Siendo V el volumen inicial, y $\triangle$ V la variación de volumen, llamaremos *compresión* a la relación:

$$\varphi = - \frac{\Delta V}{V}$$

Con signo negativo, pues existe *compresión* para $\triangle V < 0$.

Si p es la presión que ha producido esa variación de volumen, se demuestra, aplicando la ley de Hooke a las deformaciones de las aristas en un cubo sometido a este estado de carga, que:

$$p = \chi \, \varphi$$

Siendo χ el **módulo de comprensión**, que está vinculado al de elasticidad E y al módulo de Poisson con la fórmula:

$$\chi = \frac{m E}{3 (m - 2)}$$

Resultan para casi todos los sólidos valores inferiores a los que se obtienen para los líquidos (§ 184).

§ 180. — **Deslizamiento.** — Imaginemos un paralelepípedo ABCDEIGH (fig. 378) y sobre dos caras opuestas ABIE y CDGH aplicadas fuerzas F y — F uniformemente repartidas en dirección tangencial a las mismas. Se producirá una deformación tal, que el volumen se mantiene constante, pero se modifican los ángulos diedros, cuyas aristas son perpendiculares al plano determinado por F y — F.

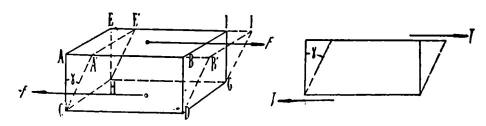


Fig. 378.—*Deslizamiento.*

Decimos que se ha producido un **deslizamiento** que mediremos por el ángulo γ.

Si llamamos:

$$T = \frac{F}{SupABIE} \qquad [7]$$

a la *tensión tangencial* que produce el deslizamiento, se verifica que:

$$T = G \,.\, \lambda \qquad [8]$$

fórmula análoga a [5], pues indica que la tensión es proporcional a la deformación. El coeficiente G se llama **módulo de elasticidad por deslizamiento**, o *módulo de rigidez*, o *módulo de torsión* y es constante para cada material.

Su valor es del orden de magnitud 0,4 E.

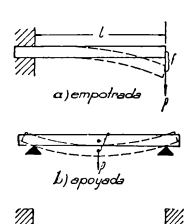


Fig. 379.—*Casos de flexión.*

Por ejemplo:

hierro dulce	770.000	Kgr/cm²
acero	850.000	„
aluminio	260.000	„

§ 181.— **Flexión.** — Una varilla prismática fija en un extremo (empotrada) y con una carga P en el otro, o apoyada o empotrada en sus extremos, y cargada en su punto medio, está sometida a un esfuerzo de flexión (fig. 379 a, b, c).

En el caso más simple suponemos que la fuerza P es normal al eje de la barra.

Al estudiar la teoría de esta experiencia se supone que las fibras tales como la *AB* se alargan, y las de la

parte inferior, como *CD*, se acortan, manteniendo su longitud las fibras como MN que forman la línea neutra (fig. 380).

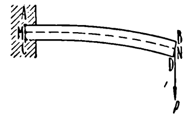


Fig. 380.—*Eje neutro en la flexión.*

En los tres casos de la fig. 379 se demuestra que la flecha *f*, o deformación máxima, es proporcional a la carga P, e inversamente proporcional al módulo de elasticidad E y al momento de inercia I de la sección transversal, estando expresada por las fórmulas:

$$\text{Caso a) } f = \frac{1}{3}\,\frac{Pl^3}{EI}$$

$$\text{b) } f = \frac{1}{48}\,\frac{Pl^3}{EI} \qquad [9]$$

$$\text{c) } f = \frac{1}{192}\,\frac{Pl^3}{EI}$$

El momento de inercia de la sección transversal se expresa en cm^4, y corresponde al momento de inercia de una figura plana cuya densidad superficial es igual a uno.

Ejemplo:

Sección circular: $I = \frac{1}{2}\pi R^4$

rectangular: $I = \frac{bh^3}{12}$

§ 182. — **Torsión.**— Consideremos un alambre o una varilla cilíndricos de longitud *l* y radio *r*, con un extremo fijo. Si en el otro extremo aplicamos una cupla contenida en un plano perpendicular al eje del cilindro, se producirá una *torsión* del mismo, que medimos por el ángulo α, que gira el extremo al cual se ha aplicado la cupla (fig. 381).

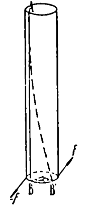


Fig. 581. — *Cilindro sometido a torsión.*

Siendo:

$$M = F \,.\, 2r \qquad [10]$$

el momento de la cupla aplicada, se verifica que:

$$M = D\,\alpha \qquad [11]$$

Donde D es una constante que depende del material y de las dimensiones del cilindro.

Se demuestra que este valor D, llamado cupla directriz, está vinculado al módulo G de rigidez (§ 180) por la fórmula:

$$D = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{l} G \qquad [12]$$

En los resortes y péndulos de torsión se produce una deformación de este tipo.

§ 183. — Elasticidad de los flúidos. — En los líquidos y gases, de acuerdo con lo que hemos estudiado en los capítulos correspondientes, sólo podemos producir variaciones uniformes en la presión que actúa en toda la superficie que los limita. Tendremos entonces variaciones de presión que producen variaciones de volumen.

Si es Δ p el aumento de presión y ΔV la variación de volumen que experimenta un volumen V de flúido, llamaremos contracción al cociente:

$$\varphi = - \frac{\Delta V}{V} \qquad [13]$$

con signo negativo, pues la contracción es positiva, cuando ΔV es negativo. Es, pues, la variación de volumen experimentada por la unidad de volumen inicial.

Llamaremos, en general, *módulo de compresibilidad* al coeficiente χ que cumple la condición:

$$\Delta p = \chi \varphi$$

o sea:

$$\Delta p = - \chi \frac{\Delta V}{V} \qquad [14]$$

Se ve que este coeficiente tiene significado análogo a los de elasticidad y al de compresión definidos para los sólidos.

§ 184. — Elasticidad de líquidos. — En los líquidos se suele expresar, en lugar de χ, su inverso llamado *coeficiente de compresibilidad*:

$$C = \frac{1}{\chi}$$

de modo que:

$$\Delta p = \frac{\varphi}{C}$$

Ya se ha dicho que los líquidos son poco compresibles, lo cual significa que C es pequeño.

Por ejemplo:

agua .... C = 0.000044 por cada Kgr/cm^2
éter .... C = 0.00011
mercurio .... C = 0.000003

Este coeficiente disminuye a medida que aumenta la presión. A 6.600 Kgr/cm^2 su valor para el agua es C = 0.00003.

Se mide en aparatos llamados piezómetros, en que se ejerce presión con un émbolo movido a tornillo, y se observa la variación de volumen experimentada por el líquido contenido en un bulbo terminado por un capilar sumergido en mercurio. Las variaciones de volumen se miden en el capilar, y las de presión con un tubito que contiene aire, al cual se aplica la ley de Boyle, pues constituye un manómetro de aire comprimido (fig. 382).

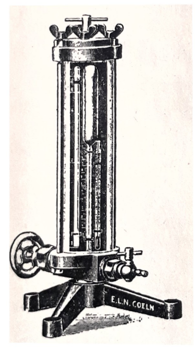


Fig. 382.—*Piezómetro para compresibilidad de líquidos.*

Debe notarse que no se produce variación de volumen en el recipiente que contiene el líquido, pues el aumento de presión es interior y exterior, al estar el conjunto sumergido en agua.

§ 185.— **Elasticidad en gases.** — En la compresión de gases se obtendrá un valor diferente para el módulo de compresibilidad, según como se realice la compresión.

Si la temperatura se mantiene constante (isoterma), la compresión cumple la ley de Boyle-Mariotte.

Siendo p y V presión y volumen antes de la compresión, y $p + \Delta p$; $V - \Delta V$ después de la compresión, podemos escribir:

$$pV = (p + \Delta p)\ (V - \Delta V) \qquad [15]$$

Efectuando operaciones:

$$pV = pV + V \,.\, \Delta p - \Delta p \,.\, \Delta V - p \,.\, \Delta V$$

de donde resulta, despreciando el producto $\Delta p \,.\, \Delta V$, pues es muy pequeño comparado con los demás:

$$\Delta p. = p \frac{\Delta V}{V} \qquad [16]$$

Comparando esta fórmula con la [14], se comprueba que **en la compresión isotérmica de gases, el módulo de compresibilidad es igual, en cada instante, a la presión** ($\chi = p$; t = constante).

Ej.: Si tenemos 100 dm^3 de gas a presión de 2 $\frac{Kgr}{cm^2}$, y aumentamos a presión en 0,1 $\frac{Kgr}{cm^2}$ experimenta una variación de volumen

$$\Delta V = \frac{V \,.\, \Delta p}{p} = \frac{100 \times 0.1}{2}\ dm^3 = 5\ dm^3$$

Otro caso interesante se produce cuando el gas está colocado en un recipiente con paredes tales que no puede recibir ni perder *calor*, en cuyo caso la compresión se llama *adiabática*.

En forma análoga a la anterior se demuestra que entonces el módulo de compresibilidad es:

$$\chi = \kappa\, p \qquad [17]$$

Siendo κ una constante característica de cada gas, que estudiaremos en el capítulo de calor (§ 252) y cuyo valor es siempre mayor que uno; κ para el aire es 1.41 y para el hidrógeno es 1.66.

CAPITULO XV

INTRODUCCIÓN A LA ACÚSTICA

Movimiento vibratorio - Sonido y sus características.

§ 186. — **Movimiento periódico y movimiento oscilatorio.** — 1. — Se dice que un punto realiza un movimiento *periódico* cuando a intervalos iguales de tiempo vuelve a pasar por los mismos puntos, animado de las mismas velocidades. Tal es el caso de los puntos de un volante que gira con velocidad angular constante.

El tiempo T que tarda cada uno de ellos en cerrar su trayectoria circular se llama *período* del movimiento.

Algunos movimientos periódicos se caracterizan por el hecho de que el punto móvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea o curvilínea, recorriéndola alternativamente en un sentido y en sentido contrario.

Tal es el caso del punto material de un péndulo simple (§ 83), que se mueve sobre un arco de circunferencia a uno y otro lado de la vertical de equilibrio; y también el de un punto A de una pesa P colgada de un resorte (figura 383), el cual, abandonado después de llevarlo hasta la posición A comienza a moverse periódicamente entre A' y A'', en línea recta, a uno y otro lado de A.

Este tipo de movimiento periódico constituye el **movimiento oscilatorio alternativo**, llamado también simplemente **movimiento oscilatorio.**

En cada instante, se llama **elongación** a la distancia del móvil a la posición de equilibrio. *La máxima elongación* recibe el nombre de **amplitud de la oscilación.** En el caso de la figura 383, AA = AA'' es la amplitud. El tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto móvil por la misma posición, moviéndose con la misma velocidad y en el mismo sentido, se llama **período** T del movimiento.

En el mismo ejemplo de la fig. 383, el intervalo entre dos pasos consecutivos del punto móvil por A' (donde se detiene), es un período. El movimiento efectuado al recorrer el trayecto A' A'' es una **oscilación simple** y su duración es **medio período.**

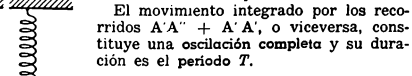


Fig. 383.—*La pesa en el extremo del resorte, se mueve con movimiento oscilatorio armónico.*

El movimiento integrado por los recorridos A'A'' + A'' A', o viceversa, constituye una **oscilación completa** y su duración es el **período** T.

Se llama **frecuencia** de un movimiento oscilatorio al número de períodos contenidos en la unidad de tiempo.

Llamando n a la frecuencia y T al período, se tiene:

$$n = \frac{1}{T} \qquad [1]$$

La frecuencia es también el número de oscilaciones completas ejecutadas en la unidad de tiempo.

a) Si un móvil realiza un movimiento oscilatorio con periodo $T = 0{,}2$ seg., la frecuencia es:

$$n = \frac{1}{0{,}2\ seg} = 5\ \frac{1}{seg}$$

En cada segundo el móvil ejecuta 5 oscilaciones completas.

b) Si $T = 24$ horas:

$$n = \frac{1}{24\ horas} = 0{,}0416\ \frac{1}{hora}$$

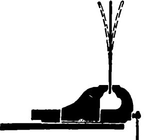


Fig. 384. — *Vibraciones de una varilla fija en uno de sus extremos.*

2.— *Vibraciones.*— Se obtienen fácilmente movimientos oscilatorios alternativos rápidos fijando una varilla metálica por uno de sus extremos (figura 384), y desplazando el otro. Al soltarlo, las fuerzas elásticas originan el movimiento oscilatorio.

Los puntos de una cuerda elástica tensa, fija en sus extremos y golpeada suavemente, adquieren también movimientos oscilatorios de período muy corto.

Los *movimientos oscilatorios de pequeño período*, se llaman **vibraciones**, y su estudio adquiere especial importancia en la física.

§ 187. — **Movimiento armónico simple o rectilíneo.** — 1. El más sencillo de estos movimientos es el *movimiento rectilíneo armónico o movimiento armónico simple* que, como se ha visto en el § 90, se obtiene proyectando un movimiento circular uniforme sobre uno de los diámetros de la circunferencia descripta por el punto móvil.

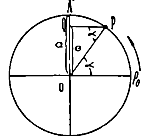


Fig. 385.—*Movimiento rectilíneo armónico, como proyección de un movimiento circular uniforme.*

Sean P una posición del punto, *a* el radio de la circunferencia descripta, T el período del movimiento circular uniforme, y A'A" el diámetro elegido para proyectar el movimiento (fig. 385).

La perpendicular PQ trazada por P sobre A'A", determina la proyección *Q* del punto móvil en un instante dado.

Al desplazarse P sobre la circunferencia, su proyección Q recorre el diámetro A'A" realizando el movimiento rectilíneo armónico.

La distancia OQ = e es la *elongación* en el instante t; la máxima elongación o *amplitud* es OA' = OA" = *a*.

El *período T* de este movimiento es igual al del movimiento circular que lo origina.

A la velocidad angular de éste, cuyo valor es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad [2]$$

se la llama **pulsación** del movimiento armónico.

De acuerdo a lo demostrado en el § 90, el valor de la elongación en este caso es:

$$e = a \text{ sen } \omega t \ (*) \qquad [3]$$

2. *Representación gráfica.* — Tomando como abscisas los tiempos y como ordenadas las elongaciones se puede trazar la curva representativa de este movimiento, que resulta una sinusoide (figura 386).

(*) en la fórmula [21] del § 90, póngase $R = a$ y la fase inicial $a_0 = 0$.

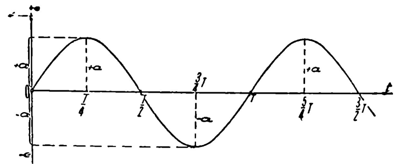


Fig. 386.—*Representación gráfica de la función* $e = a.\ \text{sen}\ \frac{2\ \pi}{T}\ t.$

La construcción de la curva se hace en la forma indicada en el § 90.

§ 188 — **El sonido. Su naturaleza.** — Se comprueba experimentalmente que, cuando un cuerpo vibra por efecto de un choque u otra causa cualquiera, esas vibraciones se transmiten al aire que lo rodea.

Es fácil comprobarlo con el dispositivo de Dreteln representado en la figura 387, que está constituído por dos anillos que soportan membranas elásticas bien tensas (parches de tambor), y se colocan próximos y paralelos.

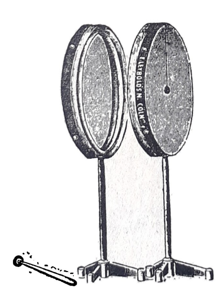


Fig 387 —*Aparato de Dreteln para comprobar la propagación de vibraciones.*

Sobre una de las membranas apoya un péndulo liviano y se observará que al golpear la otra, vibra el péndulo sobre la primera. Esto significa que las vibraciones que se originan al golpear una de las membranas, se transmiten a la otra a través del aire que las separa (puede ensayarse la experiencia con dos panderetas).

Cuando el número de vibraciones que se produce por segundo llega a cierto límite y si la intensidad adquiere un valor suficiente, percibimos una sensación que llamamos ruido o sonido.

Aquellos cuerpos que fácilmente comienzan a vibrar por

efecto de pequeños choques y continúan vibrando durante un intervalo de tiempo más o menos largo, los llamamos cuerpos **sonoros.** El cobre, el bronce, el cristal, emiten sonidos fácilmente.

Es suficiente tocar suavemente una copa, una campana o una cuerda de cualquier instrumento musical en el momento en que emiten un sonido, para notar que se encuentran en vibración. Bastará impedir la vibración para notar que el sonido se extingue.

Concluimos, por lo tanto, que el sonido es debido a la vibración de los cuerpos sonoros.

Pero no basta la vibración del cuerpo sonoro para que percibamos el sonido: es necesario que entre la fuente sonora y nuestro oído exista un medio capaz de trasmitir esas vibraciones, es decir, un medio elástico (gas, líquido o sólido). Si bajo la campana de una máquina neumática colocamos una campanilla eléctrica observaremos que, una vez hecho el vacío, aunque la campanilla vibre, no se percibe ningún sonido en el exterior (figura 388).

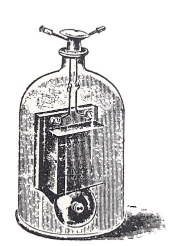


Fig. 388.—*En el vacío no se propaga el sonido*

Es que nuestro oído se comporta como la membrana elástica que usamos en la experiencia de Dreteln. El tímpano (membrana elástica tensa) vibra al recibir la vibración y la trasmite a los huesecillos llamados martillo, yunque y estribo, que apoyan suavemente sobre él. A través de los oídos medio e interno se trasmite la vibración que al fin nos produce la sensación que llamamos *sonido.*

§ 189. — **Características del sonido.** — Un sonido queda perfectamente caracterizado si se dan: su intensidad, su altura y su timbre.

La *intensidad,* la determinamos subjetivamente por la de nuestra percepción, y así decimos: sonidos *fuertes* o *débiles.* Desde el punto de vista mecánico, comprobamos que la intensidad del sonido crece al aumentar la amplitud de la vibración en la fuente sonora, a igualdad de las demás condiciones. Cuando producimos un sonido con una campana, su intensidad depende de la intensidad con que la golpeamos.

La **altura** del sonido es la característica por la cual los clasificamos en **graves** o bajos y **agudos** o altos.

Podemos comprobar que la altura depende del número de vibraciones. Si hacemos girar con velocidad constante las ruedas dentadas de la figura 389 y aproximamos un trozo de cartulina, notaremos que la rueda con más dientes produce un sonido más agudo que la de menos dientes al rozar con el borde de la cartulina. Como el número de vibraciones de la cartulina es proporcional al número de dientes de cada rueda, podemos concluir que **los sonidos son más altos, o agudos, cuanto mayor es su frecuencia.**



Fig. 389.— *Ruedas dentadas de Savart.*

La experiencia nos enseña que no todas las frecuencias de vibración pueden llegar a constituir un sonido.

Los límites están sujetos a variaciones según el observador, pero puede decirse, en general, que sólo las vibraciones de frecuencia mayor que $16 \frac{1}{seg}$ y menor que $45.000 \frac{1}{seg}$ **pueden constituir un sonido.** Se dice que esos son los límites de *frecuencia audible.* El límite superior es el que más varía con el observador.

El timbre del sonido es la característica que nos permite, de dos sonidos de igual altura e intensidad emitidos por dos fuentes sonoras diferentes, distinguir cuál corresponde a cada una de ellas. Aun los oídos menos educados distinguen una misma nota emitida por un piano o por un violín.

Es que las fuentes sonoras no emiten **sonidos puros**, es decir, de una única frecuencia bien determinada. El sonido fundamental, al cual corresponde la mayor intensidad, va acompañado por otros más débiles cuya frecuencia es un múltiplo de la del sonido fundamental, llamados **armónicos** de aquél. Ahora bien: la cantidad e intensidad relativa de los armónicos varía con la fuente sonora y le imprime su *timbre* característico.

De todo lo dicho deducimos que, fijados la *intensidad,* la *altura,* el *timbre* de un sonido, queda perfectamente caracterizado.

§ 190. — **Medida de la altura de los sonidos. Sirena de Cagniard de Latour.** — De las tres características del sonido, la más fácil de medir es la *altura* (diremos indistintamente *altura* o *frecuencia,* entendiendo que ello significa: *frecuencia de la vibración* que origina el sonido).

Corrientemente se utilizan como *patrones de frecuencia* los **diapasones**, que son varillas prismáticas metálicas, dobla-

das en forma de U y sostenidas por su punto medio. Al golpear el diapasón *vibra con una frecuencia bien definida* que depende de la longitud de las ramas y de su ancho *a* (fig .390), siendo independiente del espesor b.

Con una serie de diapasones de frecuencias crecientes se busca el que emite un sonido de igual altura que aquel cuya frecuencia se desea determinar. El oído es muy sensible para apreciar si dos sonidos simultáneos son de la misma frecuencia (unísono).

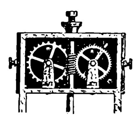
Fig. 390. — *La frecuencia del sonido dado por el diapasón depende del ancho a, pero no del espesor b.*

Este método tiene el inconveniente de que la frecuencia buscada puede no coincidir con la de ninguno de los diapasones de la serie.

Entonces se utiliza la *sirena de Cagniard de La Tour* que es una fuente sonora cuya frecuencia puede tomar cualquier valor.

Consiste en una caja metálica cilíndrica con dos tapas, una de ellas fija, y otra móvil (fig. 391), que puede girar alrededor de su centro sobre el eje común.

Ambas llevan el mismo número de orificios dispuestos sobre circunferencias de igual diámetro. Los de la tapa fija inclinados en cierto sentido en el plano normal al radio y los de la tapa móvil inclinados en sentido contrario.



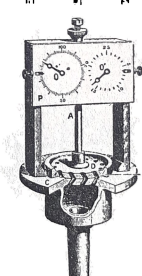


Fig. 391.—*Sirena de Cayniard de La Tour. En la parte superior el contador de vueltas, visto de atrás.*

Insuflando aire por la parte inferior de la caja, saldrá por los orificios de la tapa fija, formando una corriente de aire que choca con las paredes de los orificios de la tapa móvil y provoca su rotación. Entonces se producen sucesivas interrupciones en la corriente de aire, que vibra produciendo un sonido. La frecuencia del sonido será igual al número de interrupciones por unidad de tiempo.

Modificando la presión del aire se modifica la frecuencia de las interrupciones y, por lo tanto, la del sonido.

Un contador de vueltas permite medir la velocidad de rotación de la tapa móvil.

Si ambas tapas tienen *m* orificios, en una vuelta se producen *m* interrupciones,

en N vueltas se producirán Nm interrupciones.

La frecuencia del sonido emitido será entonces:

$$n = N \,.\, m \qquad (4)$$

siendo N el número de vueltas por segundo.

Una vez igualada la altura del sonido que emite la sirena con la que se quiere determinar, bastará medir N para calcular n.

§ 191. — **Inscripción de vibraciones.** — Es muy sencilla la experiencia que permite registrar las vibraciones de un diapasón. Basta una lámina de vidrio ahumado y un diapasón con



Fig. 392.—*Inscripción de las vibraciones del diapasón.*

una aguja o estilete en el extremo de una de sus ramas (figura 392).

Desplazando el diapasón con la punta del estilete apoyado en el vidrio ahumado, mientras está vibrando, inscribe una curva que es la representación gráfica de las vibraciones en función del tiempo.

Para que la curva sea regular es necesario que la velocidad con que se desplaza el diapasón sea constante. Se suele inscribir la vibración sobre un cilindro que se hace girar con velocidad constante, y al mismo tiempo se desplaza longitudinalmente. En un papel ahumado arrollado al cilindro quedan registradas las vibraciones del estilete o aguja (fig. 393).

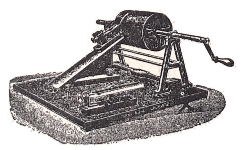


Fig. 393.—*Inscripción de vibraciones sobre un tambor en rotación.*

Se comprobará que la curva dibujada es una sinusoide, es decir, la misma curva que representa las elongaciones en el movimiento rectilíneo armónico.

§ 192. — **Sonido puro y movimiento armónico.** — Hemos dicho que el diapasón se emplea corrientemente como patrón de frecuencia, porque da un sonido cuyo período es bien definido y que puede considerarse como un *sonido puro.*

Ahora bien: analizando detenidamente los gráficos que resultan de la inscripción de las vibraciones de un diapasón,

se observa que tienen forma sinusoidal, y de ello podemos sacar en consecuencia que las vibraciones del diapasón son tales que cada punto realiza un movimiento que prácticamente puede confundirse con el armónico simple.

§ 193.—**Movimientos vibratorios compuestos. Teorema de Fourier.**— Los movimientos vibratorios que originan los sonidos que percibimos son compuestos en la casi totalidad de los casos.

Aun en el diapasón el sonido puro no se obtiene, sino después que los armónicos que caracterizan su timbre se han apagado por efecto del amortiguamiento.

Por eso es que, en general, los movimientos vibratorios de los puntos de un cuerpo que emite sonido no se pueden representar por una sinusoide, ni responden a la ecuación del movimiento armónico simple.

Pero, hay un teorema importante, conocido con el nombre de teorema de Fourier, (cuya demostración no cabe dentro de los límites de esta obra), que permite establecer la relación entre los movimientos periódicos de forma compleja y los movimientos armónicos simples.

Para interpretar su enunciado, vamos a realizar previamente una composición de movimientos vibratorios simples de la misma dirección y distintos períodos y amplitudes. Supondremos, para simplificar, que el origen de los tiempos se ha elegido convenientemente para que las fases iniciales sean nulas.

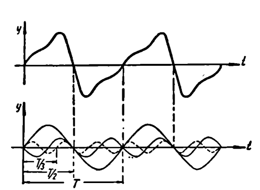


Fig. 394.—*Vibración resultante de la superposición de otras tres cuyos períodos están en la relación* 1 : ½ : ⅓ *y cuyas fases iniciales son nulas.*

Las tres sinusoides trazadas representan movimientos vibratorios de períodos T, T/2, T/3 (figura 394).

De acuerdo con el principio de superposición de movimientos (§ 53) para determinar el desplazamiento o elongación resultante, en cada instante, deben sumarse con su signo los segmentos representativos de las elongaciones componentes, (las que, como se ha dicho, son de la misma dirección).

El movimiento resultante es representado por la curva irregular en línea negra gruesa, que no es una sinusoide y cuya ecuación es una expresión matemática compleja. Con más movimientos la línea resultante sería distinta, pero, representaría siempre a un movimiento complejo de período T y frecuencia

$$n = \frac{1}{T}$$

El teorema de Fourier establece que un movimiento vibratorio cualquiera de período T puede siempre expresarse, como una suma de movimientos armónicos simples de períodos

$$T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{T}{4}, \frac{T}{5} \ldots,\ldots$$

Estudiando la composición de movimientos armónicos simples se puede, pues, llegar a los más complejos, o sea, a los movimientos reales de los cuerpos sonoros.

§ 194. — **Composición de movimientos vibratorios.** — Puede ocurrir que el punto esté sometido a la acción de dos vibraciones. En ese caso, si ambas son paralelas, la vibración resultante se obtiene sumando las ordenadas correspondientes a cada vibración (principio de superposición), como muestra la figura 395. La curva (c) da el movimiento resultante de (a) y (b).

Fig. 395.—*Suma de vibraciones de distinto período.*

Si ambas vibraciones son de igual período (igual ω), pero de distintas fase inicial y amplitud, se puede aplicar la *regla de Fresnel,* que consiste en dibujar la sinusoide con el radio vector resultante de los radios vectores que corresponden a las vibraciones componentes, en el instante inicial (fig. 396).

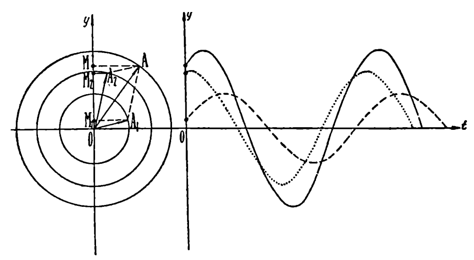


Fig. 396.—*Regla de Fresnel para la suma de vibraciones de igual período.*

En la figura, la curva de trazos representa el movimiento de la proyección del punto A_1; la curva de puntos el de la proyección de A_2, y la línea llena el movimiento resultante (proyección de A).

Cuando las vibraciones se cumplen según rectas perpendiculares, la vibración resultante es más compleja, pues trayectoria y período dependen de los períodos y fases iniciales de las vibraciones componentes. Se obtienen las curvas llama-

das de Lissajous, algunas de las cuales pueden verse en la figura 397.

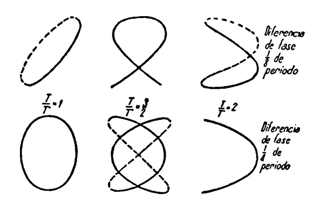


Fig. 397.—*Composición de vibraciones perpendiculares. Figuras de Lissajous.*

Si los períodos T y T' de las vibraciones componentes son iguales se obtienen en general, elipses, y como casos particulares, *rectas.* (Esto último para diferencias de fase 0° y 180°).

A la izquierda, en la figura 397, se ven dos elipses que corresponden a diferencias de fase de 45° y 90° respectivamente, (o sea a ⅛ y ¼ de período).

Los ejes de la elipse inferior miden el doble de las amplitudes de los movimientos componentes.

Las otras curvas se obtienen componiendo movimientos cuyos períodos están en las relaciones 3: 2 y 2: 1, para las mismas diferencias de fases y amplitudes.

Experimentalmente se obtienen proyectando sobre una pantalla un rayo de luz reflejado en dos espejos adheridos a los extremos de las ramas de dos diapasones convenientemente dispuestos (fig. 398).

Fig. 398.—*Instalación para la obtención experimental de las figuras de Lissajous.*

CAPÍTULO XVI

ACÚSTICA

Propagación y superposición de ondas - Vibraciones de varillas, cuerdas y tubos - Resonancia - Acústica musical.

§ 195. — **Propagación de ondas.** — Hemos visto que para que podamos percibir un sonido debe existir, entre la fuente sonora y nuestro oído, un medio elástico. Es que la vibración de la fuente debe *propagarse* hasta llegar a nuestro oído. Vamos a aclarar qué debe entenderse por propagación de una onda.

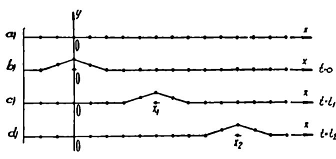


Fig. 399.—*Propagación de una onda.*

Imaginemos que el medio elástico está constituído por partículas pequeñas, ocupando cada una su posición de equilibrio bien determinada y supongamos que en el instante $t = 0$ las partículas que rodean al origen son sacadas de su posición de equilibrio por una causa cualquiera (fig. 399). Si en un instante posterior t_1 encontramos la misma deformación del medio elástico en el punto de abscisa $x_1 = vt_1$ y en otro instante cualquiera t_2 en el punto $x_2 = vt_2$, y así sucesivamente, decimos que se ha propagado una onda con velocidad constante y en la dirección del eje x.

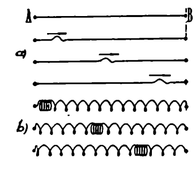


Fig 400.—*Propagación de una onda en una cuerda y en un resorte.*

Podremos observar esta propagación fijando por uno de sus extremos B una cuerda o un tubo de goma de 2 a 3 metros de longitud y manteniéndolo tirante por el otro A. Produciendo en A una pequeña deformación, se observará que se propaga a lo largo de la cuerda (fig. 400 a).

Lo mismo puede realizarse con un resorte largo y mantenido tirante. Desplazando longitudinalmente las espiras (fig. 400 b), próximas a uno de los extremos y soltándolas, se observa que la deformación se propaga a lo largo del resorte.

En todos estos ejemplos suponemos la propagación de la onda según una única dirección. Puede ocurrir que la onda se propague *en todas direcciones,* en forma tal que la deformación que en el instante t_1 se produce a la distancia r_1, se repite en el instante t_2 a la distancia r_2, tal que:

$$r_2 - r_1 = v\ (t_2 - t_1)$$

cualquiera que sea la dirección considerada. En ese caso tendremos una **onda esférica.** Se comprende que todos los puntos que experimentan igual desplazamiento se encuentran sobre una superficie esférica que constituye lo que se llama **superficie de onda o frente de onda.** Si esta superficie es un plano, la onda se llama **onda plana.**

Una imagen muy clara de la propagación de ondas la obtenemos observando una superficie de aguas tranquilas sobre la cual arrojamos una piedra; se produce una onda que se propaga sobre la superficie del agua en todas direcciones. Lo característico de la propagación de ondas es que cada punto del medio elástico sacado de su posición de equilibrio vuelve a ella después de haber pasado la onda; es decir, lo que se propaga es el movimiento sin que se produzca transporte de materia. Pequeños cuerpos flotantes en el agua oscilan verticalmente alrededor de su posición de equilibrio, pero no se desplazan al pasar la onda.

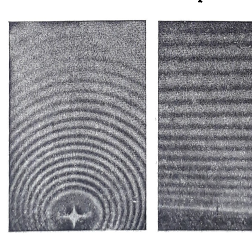


Fig. 401.—*Propagación de ondas en la superficie de un líquido.*

Llamamos la atención sobre el hecho de que en todos estos

razonamientos hemos supuesto que lo que se propaga *no es una vibración,* sino una perturbación cualquiera. Este concepto de onda es el que se aplica en el lenguaje meteorológico cuando se dice: "una ola de frío invade al país desde la Patagonia". Se quiere decir: en días sucesivos se registran temperaturas inferiores a la normal en localidades ubicadas cada vez más hacia el norte del país.

Veremos que en el problema de la acústica lo que se propaga es una *vibración* o movimiento oscilatorio.

§ 196.—**Ecuación del rayo.**—En lenguaje matemático se define la *onda* que se propaga en dirección del eje OX, con velocidad v, como una función cualquiera del argumento:

$$t - \frac{x}{v}$$

Es particularmente interesante por sus aplicaciones en la física, el caso en que se propaga un movimiento oscilatorio armónico simple.

Imaginemos una serie de puntos de un medio elástico en reposo, alineados según el eje OX.

Si en el instante $t = 0$ el punto O inicia un movimiento armónico en la dirección del eje OY, cuyas elongaciones están dadas por la ecuación (§ 187, fórmula 3).

$$y = e = a \,.\, sen\ \omega\ t \qquad [1]$$

admitiendo que ese movimiento se propaga a lo largo de OX con velocidad constante v, podemos establecer que el punto M de abscisa x repetirá el movimiento de O con un retardo:

$$\Delta t = \frac{x}{v} \qquad [2]$$

ya que éste es el tiempo que tarda la perturbación vibratoria en recorrer la distancia x.

La ecuación que da las elongaciones de M será por lo tanto:

$$y = a \,.\, sen\ \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)^{(1)} \qquad [3]$$

Esta es la **ecuación del rayo** que da la posición de un punto cualquiera M, en el instante t.

Puede observarse que se trata de una ecuación doblemente periódica, con respecto a x y con respecto a t.

En efecto, suponiendo t = constante representa una sinusoide en función de x, y si suponemos x = constante representa una sinusoide en función de t.

(1) Suponemos aquí que las oscilaciones no se amortiguan, manteniéndose constante la amplitud inicial a. En rigor esto se cumpliría en las ondas planas.

Reemplazando ω por su valor $\frac{2\pi}{T}$ la ecuación del rayo toma la forma:

$$y = a \, . \, sen \, \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = a \, . \, sen \, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) \qquad [4]$$

El valor vT que es el espacio recorrido por la perturbación en un período se llama longitud de onda y es la distancia que separa dos puntos que vibran con la misma fase.

$$\lambda = v \, T \qquad [5]$$

La *ecuación del rayo* puede escribirse finalmente:

$$y = a \, sen \, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad [6]$$

Para valores

$$t = 0 \, , t = T \, , t = 2\,T \, ...$$

se convierte en:

$$y = a \, sen \, 2\pi \, \frac{x}{\lambda} \qquad [7]$$

que representada da la sinusoide función de x, indicada en negro en la figura 402, (pues para $x = o$ es $y = o$).

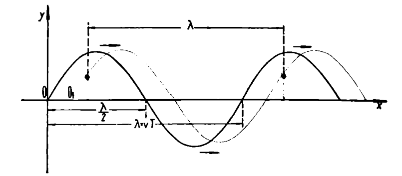


Fig. 402.—*Dos posiciones sucesivas de una onda que se propaga en el sentido de las x positivas.*

El valor de y se anula para los valores $x = 0, x = \frac{\lambda}{2}, x = \lambda$, etc.

Para un intervalo $(t_2 - t_1)$ el corrimiento es:

$$00_1 = v \, (t_2 - t_1) \text{ (fig. 402, línea roja)}$$

§ 197.—El caso general de propagación de una onda cualquiera puede encararse de análoga manera.

Sea una perturbación representada por la ecuación

$$y = 5\ t^2 - 2t \qquad [8]$$

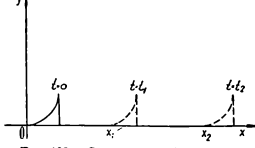


Fig. 403.—*Sucesivas posiciones de una onda de forma cualquiera.*

Si se origina una onda que se propaga con velocidad v y en la dirección del eje x, ello significa que al cabo de un tiempo t cualquiera, el punto A que se encuentra a la distancia: $x = vt$ comenzará a moverse de acuerdo con la misma ecuación:

$$y = 5t_1^2 - 2t_1$$

siendo t_1 el tiempo contado a partir del instante en que la perturbación ha llegado al punto A. Por lo tanto, de acuerdo con lo dicho, el tiempo t_1 debe ser igual a la diferencia entre el tiempo t del origen y el intervalo de tiempo $\frac{x}{v}$ empleado por la onda en llegar a A, luego:

$$t_1 = t - \frac{x}{v}$$

entonces la onda estará representada por la ecuación:

$$y = 5 \left(t - \frac{x}{v} \right)^2 + 2 \left(t - \frac{x}{v} \right) \qquad [9]$$

Por otra parte, en el instante t' y en el punto x' la perturbación tiene un valor:

$$y' = 5 \left(t' - \frac{x'}{v} \right)^2 + 2 \left(t' - \frac{x'}{v} \right) \qquad [10]$$

Calculemos el valor y'' que toma en un instante posterior t'', en el punto de abscisa:

$$x'' = x' + v\ (t'' - t') \qquad [11]$$

Será:

$$y'' = \left(t'' - \frac{x''}{v} \right)^2 + 2 \left(t'' - \frac{x''}{v} \right)$$

y reemplazando x'' por su valor [11]

$$y'' = 5 \left[t'' - \frac{x' + v\,(t'' - t')}{v} \right]^2 + 2 \left[t'' - \frac{x' + v\,(t'' - t')}{v} \right]$$

quitando paréntesis y reduciendo se llega a:

$$y'' = 5 \left(t' - \frac{x'}{v} \right)^2 + 2 \left(t' - \frac{x'}{v} \right) \qquad [12]$$

de donde deducimos, comparando con [10] que:

$$y'' = y'$$

o sea, que la perturbación se ha propagado con velocidad v constituyendo una onda.

Se comprende que cualquiera hubiera sido la función elegida, habríamos llegado al mismo resultado, pues es el argumento $t - \frac{x}{v}$ el que vuelve a tomar el mismo valor todas las veces que el incremento de t es igual al incremento de $\frac{x}{v}$.

§ 198. — **Ondas transversales y longitudinales.** — Cuando se propaga una onda en un medio elástico pueden ocurrir dos casos extremos: o las partículas se mueven en la dirección de la propagación de la onda, o se mueven en un plano perpendicular a dicha dirección; en el primer caso decimos que se propaga una **onda longitudinal**, en el segundo, una **onda transversal**.

Diremos, pues: se propaga una onda elástica longitudinal cuando las partículas del medio elástico sufren desplazamientos paralelos a la dirección de la propagación (por ejemplo, el desplazamiento de las espiras del resorte de la figura 400 b).

Y, además: se propaga una onda elástica transversal cuando las partículas del medio elástico sufren desplazamientos contenidos en planos normales a la dirección de propagación (p. ej.: las partículas de la fig. 399 y los puntos de la cuerda de la fig. 400 a).

Con estas definiciones se comprende fácilmente que sólo se puede hablar de ondas transversales o longitudinales, cuando la perturbación que se propaga es representable por un vector, como en el caso del desplazamiento de partículas. Pero en el ejemplo de la ola de frío, esa clasificación carece de sentido.

Es interesante hacer notar que las ondas elásticas transversales sólo pueden propagarse en los sólidos. En efecto: en el flúido, producido el desplazamiento de una partícula, y no existiendo rozamiento entre ellas, no arrastrará en su movimiento a las que están a su alrededor, sino a las que están *delante* en la dirección del movimiento.

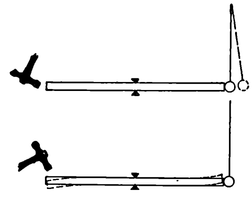


Fig. 404.—*Onda longitudinal y onda transversal.*

Las ondas longitudinales, en cambio, se propagan en todos los medios, sólidos y flúidos.

Si la varilla metálica de la figura 404, fija en su punto medio, se golpea suavemente en la dirección de su longitud, se produce una onda longitudinal que se propaga hacia el otro extremo, notándose claramente que la esferilla apoyada en él es rechazada al llegar la onda.

Si se la golpea en sentido transversal, no se produce el rechazo del pendulillo, pero, en cambio, salta un jinetillo colocado en el extremo.

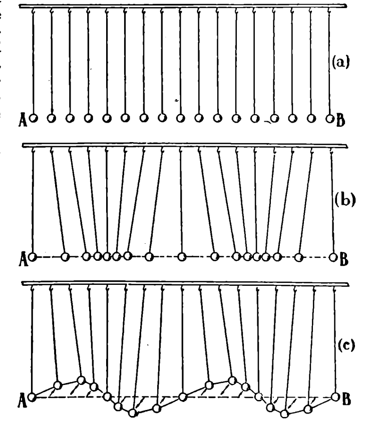


Fig. 405.—*Onda longitudinal y onda transversal en un conjunto de péndulos.*

Tendremos una imagen clara del mecanismo de la propa-

gación de las ondas con el conjunto de péndulos de la figura 405 cuyas esferas elásticas están próximas y alineadas según una recta.

Si golpeamos la primera en la dirección *AB*, chocará con la segunda, y ésta con la tercera, y así sucesivamente, de modo que el movimiento se trasmite desde la primera hasta la última (*onda longitudinal*) (fig. 405 b).

Pero si desplazamos al primer péndulo normamente a *AB*, no tocará al 2º ni lo arrastrará en su movimiento (en un flúido no hay ondas transversales).

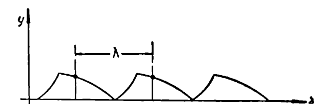


Fig. 406.—*Longitud de onda en una onda de forma cualquiera.*

Unamos ahora cada esfera con la siguiente por medio de un pequeño hilo (fig. 405 c) y desplacemos la 1ª horizontalmente en dirección normal a *AB*, arrastrará a la 2ª, ésta a la 3ª, y así sucesivamente (*onda transversal*).

§ 199. — **Longitud de onda.** — Hemos estudiado hasta aquí la propagación de una perturbación en un medio elástico. Supondremos ahora que en el origen se produce una vibración continua de modo que se origina una emisión continua de ondas iguales.

Cuando transcurre un período T, se repiten las condiciones iniciales, y así sucesivamente. Pero en ese tiempo la onda anterior ha recorrido un camino de longitud:

$$\lambda = vT \qquad [13]$$

de modo que todos los puntos situados en la dirección de propagación a la distancia λ se encuentran en **concordancia de fase**, o sea están pasando por el mismo estado de perturbación exactamente en las mismas condiciones (fig. 406).

La longitud λ se llama **longitud de onda.**

El caso más sencillo que se puede estudiar es aquel en que el movimiento vibratorio que origina las ondas es un *movimiento oscilatorio armónioo* que es el que adquieren los puntos de las ramas del diapasón cuando se lo hace vibrar. Su ecuación:

$$y = a \cdot sen\ \omega\ t \qquad [14]$$

está representada por la curva de la fig. 407 y se llama *sinusoide*.

La onda generada por un movimiento de este tipo se llama *onda sinusoidal*. Las sucesivas posiciones de los puntos del eje x están representadas en la fig. 402 en negro para un cierto instante y en rojo para un pequeño intervalo de tiempo después.

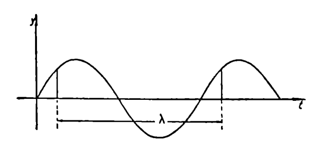
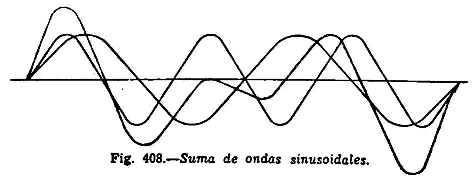


Fig. 407.—*Longitud de onda.*

§ 200. Superposición de ondas Ondas estacionarias. — Si tenemos dos fuentes productoras de ondas que actúan al mismo tiempo, se propagarán ambas ondas en el medio elástico y en cada instante tendremos que aplicar en cada punto el principio de superposición para obtener la onda resultante. Si los desplazamientos que cada una produce son paralelos, el desplazamiento resultante será la suma de los que producirían las componentes. Así, por ejemplo, en la figura 408 se han sumado dos ondas sinusoidales cuyas longi-


Fig. 408.—*Suma de ondas sinusoidales.*

tudes son, respectivamente, λ_1 y $\lambda_2 = \frac{2}{3} \lambda_1$

La línea roja da la suma de ambas que, en general, no es una sinusoide.

Cuando se suman dos ondas que se propagan en la misma dirección y sentido, pero en *oposición de fase,* (o sea con una diferencia de fase de 180°), en forma tal que los desplazamientos que producirían en cada punto son iguales y de signo contrario, se anulan entre si permaneciendo los puntos en reposo. A este fenómeno se lo llama *interferencia.*

Presenta mucho interés en acústica el caso de la superposición de dos ondas sinusoidales de igual longitud e igual amplitud que se propagan en sentido contrario. En ese caso se forman **ondas estacionarias.**

Analicémoslo en la figura 409, donde se han representado en negro con línea llena y punteada las ondas que se desplazan hacia derecha e izquierda, respectivamente, y en rojo la onda resultante. Se observa lo siguiente: 1°) Hay puntos llamados **nodos** que permanecen constantemente en reposo; 2°) Todos los puntos vibran con amplitudes diferentes que crecen desde el nodo hacia el punto medio entre dos nodos (**vientre**); 3°) Todos los puntos pasan por la posición de equilibrio o de máxima elongación al mismo tiempo. Vibran *en concordancia de fase* los comprendidos entre dos nodos consecutivos.

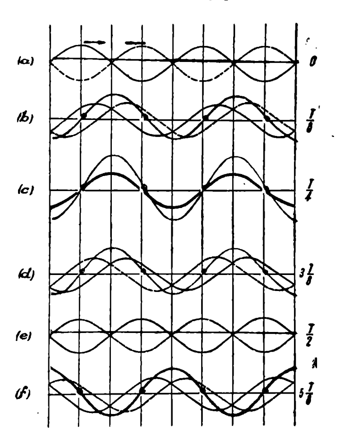


Fig. 409.—*Formación de ondas estacionarias por la superposición de dos ondas iguales que se propagan en sentido contrario. Los nodos están indicados por puntos rojos.*

Este tipo de ondas se produce, en general, en las fuentes sonoras.

La designación de *ondas estacionarias* se justifica si observamos una cuerda tensa vibrando. Se forman nodos intermedios y se ve vibrar la cuerda, pero no produce la sensación de que la *onda progresa,* como ocurre en el caso corriente en que la onda se llama *progresiva* (fig. 410).

Nota. —En las representaciones gráficas, si la onda es transversal, la ordenada en cada punto es proporcional al desplazamiento de cada partícula. Si la onda es longitudinal, cada ordenada es proporcional al desplazamiento que la partícula

correspondiente a ese punto en estado de reposo ha experimentado en la dirección de propagación de la onda. La ordenada positiva significa corrimiento hacia adelante y la negación, corrimiento hacia atrás (fig. 411).

§ 201. — **Propagación del sonido - Velocidad.** — 1. Se ha dicho ya que el sonido es producido por las vibraciones de los cuerpos sonoros y que llega a nuestro oído a través de los medios elásticos. Ello indica que se produce una p r o p a g a c i ó n d e o n d a s s o n o r a s.

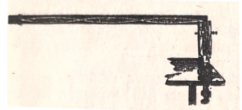


Fig. 410.—*Onda estacionaria.*

Como hemos visto, en l o s f l ú i d o s (líquidos y gases) s e p r o p a g a n o n d a s l o n g i t u d i n a l e s y e n l o s s ó l i d o s s e p u e d e n p r o p a g a r i n d i s t i n t a m e n t e o n d a s l o n g i t u d i n a l e s o t r a n s v e r s a l e s.

En la fig. 411 se puede observar que las vibraciones longitudinales producen condensaciones en ciertos puntos y dilataciones en otros. Como la propagación de la onda sonora se produce en todas direcciones, se forman *ondas esféricas* progresivas que consisten en la propagación de sucesivas compresiones y dilataciones del medio elástico.

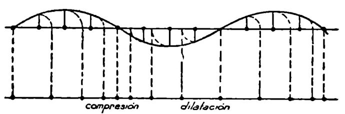


Fig. 411.—*Onda longitudinal sinusoidal.*

Comprobamos las variaciones de presión que produce la onda sonora, utilizando la *cápsula manométrica* de König, representada en la fig. 412.

Fig. 412.—*Cápsula manométrica de König y su instalación para el estudio de ondas.*

Es una cápsula dividida por una membrana elástica; una débil corriente de gas mantiene la llama de longitud constante en el pico D. Al llegar una onda sonora por *B*, las

variaciones de presión hacen vibrar la lámina y oscilar la presión del gas en la otra parte; a un aumento de presión corresponderá un alargamiento de la llama y a una disminución, un acortamiento. Para poderlo observar, se mira la imagen reflejada en un espejo giratorio, como indica la figura, en el cual aparecerá una franja luminosa de ancho constante cuando no llega ningún sonido a la cápsula y una banda luminosa dentada al llegar una onda sonora.

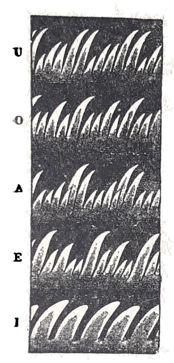


Fig. 413.—*Imágenes que se observan en el espejo giratorio frente a la cápsula manométrica.*

La longitud de onda definida en el § 199 y la fórmula [13] vinculan la velocidad de propagación, la longitud de onda y la frecuencia; pues siendo:

$$n = \frac{1}{T} \qquad \text{fórmula [14]}$$

resulta:

$$\lambda = vT = \frac{v}{n} \qquad [15]$$

o sea:

$$v = n\lambda \qquad [16]$$

La velocidad de propagación del sonido varía según la naturaleza del medio en que se propaga, independientemente de la frecuencia y la intensidad.

En general, podemos decir que depende de la elasticidad y de la densidad del medio. En el aire a 15° de temperatura es del orden de los 340 m/seg; en el agua llega a 1400 m/seg, y en el hierro es de unos 5000 m/seg.

2.—Se deduce teóricamente que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales depende del *módulo de elasticidad* y de la *densidad* del medio de acuerdo con la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\delta}} \qquad \text{(fórmula de Newton)} \quad [17]$$

En los gases y para determinado tipo de propagación, el módulo de elasticidad está representado por el producto:

$$E = \kappa\, p$$

siendo p la presión y κ una constante característica de cada gas, que para el aire es igual a 1.41.

Luego resulta la velocidad del sonido en los gases:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa\, p}{\delta}} \qquad [18]$$

Así, por ejemplo, en el aire a cero grado de temperatura y presión normal, siendo:

$$\kappa = 1.41$$

$$p = 760\ mm \text{ de } Hg = 1033\ gr/cm^2 = 1033 \times 981\ \frac{dina}{cm^2}$$

$$\delta = 0{,}001293\ \frac{g}{cm^3}$$

resulta:

$$v = \sqrt{\frac{1.41 \times 1033 \times 981}{0.001293}\ \frac{cm^2}{seg^2}} = 332\ \frac{m}{seg}$$

En los líquidos se suele dar el coeficiente de compresibilidad:

$$\chi = \frac{1}{E}$$

de modo que resulta:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\chi\, \delta}} \qquad [19]$$

Para el agua es:

$$\chi = 0.00005\ \frac{cm^2}{Kgr} = \frac{0.00005}{980665}\ \frac{cm^2}{dina}$$

$$\delta = 1\ \frac{g}{cm^3}.$$

luego:

$$v = \sqrt{\frac{980665}{0{,}00005}}\ \frac{cm}{seg} = 1400\ m/seg$$

En los sólidos aplicamos directamente la fórmula [17]
Por ejemplo, en el hierro:

$$E = 2.200.000 \frac{Kgr}{cm^2}$$

$$\delta = 7.5 \frac{g}{cm^3}$$

entonces.

$$= \sqrt{\frac{2.200.000 \times 981.000}{7,5}} \frac{cm}{seg} = 5365 \text{ m/seg}$$

Todos estos valores calculados concuerdan perfectamente con los que se obtienen en las determinaciones experimentales.

3. — *Relación de* v *con la temperatura.*

En el § 227 se demostrará que la densidad de un sólido está ligada con la temperatura t y el coeficiente de dilatación cúbica γ por la relación:

$$\delta_0 = \delta_t \ (1 + \gamma t)$$

donde δ_0 es la densidad del cuerpo a 0° y δ_t la correspondiente a t° centigrados.

Esta relación puede aplicarse a los líquidos y aún a los gases si se supone constante la presión.

Sustituyendo en la fórmula de Newton [17], se tiene:

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\delta_t}}}{\sqrt{\frac{E}{\delta_0}}} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\delta_t}}}{\sqrt{\frac{E}{\delta_t \ (1 + \gamma t)}}}$$

y simplificando:

$$\frac{v_t}{v_0} = \sqrt{1 + \gamma t}$$

o sea:

$$v_t = v_0 \sqrt{1 + \gamma t} \qquad [20]$$

Para el aire a la presión normal,

$$\gamma = \alpha = 1/273 \ ; \quad y \ v_0 = 330 \ \frac{m}{seg}$$

La velocidad del sonido a 20° resulta:

$$v_{20} = 330 \frac{m}{seg} \sqrt{1 + \frac{20}{273}} =$$

$$= 330 \sqrt{1{,}08} = 343{,}20 \frac{m}{seg}$$

§ 202 —**Medida de la velocidad del sonido. - Método directo.** — Por método directo se determina la velocidad del sonido en el aire midiendo el tiempo que tarda en recorrer una longitud conocida de camino. Para ello se produce un sonido en un lugar al mismo tiempo que se emite una señal luminosa. Un observador colocado a distancia conocida mide la diferencia de tiempo con que percibe la señal luminosa y la onda sonora. Como para las distancias en que se opera, el tiempo que tarda en llegar la luz es prácticamente igual a cero, se tiene directamente el tiempo que tardó en llegar el sonido.

Para evitar el error debido a la influencia del viento, se efectúan simultáneamente mediciones en dos sentidos opuestos. Debe también tenerse en cuenta la presión atmosférica del momento y la humedad del ambiente, pues ambas influyen en la velocidad de propagación del sonido.

De las experiencias más recientes resulta que el valor más probable de la velocidad de propagación del sonido en aire seco a 0° de temperatura es de:

$$330.7 \; m/seg$$

Para sonidos de muy elevada frecuencia parece que debe tomarse el valor: 331.7 m/seg.

Para medir la velocidad de propagación en el agua se ha realizado la experiencia en forma análoga: se produce en un lugar un sonido y al mismo tiempo se emite sobre la superficie una señal luminosa. El observador colocado a distancia mide, como en el caso anterior, el tiempo que tarda en llegar el sonido con relación a la llegada de la señal luminosa. Es clásica la experiencia realizada por Colladon y Sturm, en el lago de Ginebra, en el cual midieron el tiempo que tardaba en recorrer un trayecto de 14 Km el sonido emitido por una campana sumergida en el agua.

Obtuvieron para la temperatura de 8° centigrados el valor

$$v = 1435 \; m/seg$$

En otros líquidos y en los sólidos se determina generalmente por métodos indirectos la velocidad del sonido.

§ 203. — **Reflexión del sonido. - Eco.** — Cuando una onda sonora que se propaga por un medio elástico llega a la superficie de separación con otro medio, ya sea más o menos denso, se produce una *reflexión* de la onda, es decir, que una nueva onda de igual frecuencia comienza a propagarse en sentido contrario.

Así, por ejemplo, si una onda que se propaga en aire se encuentra con la superficie de un muro, se refleja, y el observador colocado delante percibirá el sonido, como si proviniera de otra fuente sonora S' situada detrás del muro (fig. 414).

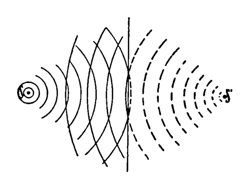


Fig. 414.—*Reflexión de ondas esféricas.*

Del mismo modo, si la onda se ha generado en el interior del muro y llega a su superficie, se refleja nuevamente hacia el interior. En ambos casos una parte de la energía sonora pasa, además, hacia el segundo medio, produciéndose *refracción del sonido.*

Cuando un observador percibe distintamente el sonido directo y el reflejado, decimos que se ha producido eco. Para ello es necesario que el sonido reflejado sea suficientemente intenso y llegue al oído por lo menos con un retraso de 1/10 de segundo. Si el observador está al lado de la fuente sonora, la pared reflectora debe encontrarse, por lo menos, a 17 metros de distancia para que el tiempo que tarda la onda sonora en el camino de ida y vuelta sea 1/10 de segundo.

En las salas de espectáculos es necesario estudiar la distribución de ornamentos y bóvedas para que no lleguen al espectador los sonidos directos y los reflejados, pues aunque no se llegue a producir *eco,* la superposición de sonidos dificulta la audición. En algunos lugares se colocan cortinados en los cuales la reflexión es casi nula.

Con dos pantallas metálicas en forma de espejos parabólicos se puede, colocando un reloj en el foco de uno de ellos, oír el ruido de su marcha, colocando el oído en el foco del otro. En este caso las ondas reflejadas han sido enviadas hacia el segundo espejo y allí reflejadas hacia el respectivo foco (fig 415).



Fig. 415.—*Espejos acústicos.*

La experiencia puede repetirse fácilmente con dos platos

comunes. Se oye un reloj de bolsillo a 2 ó 3 metros de distancia.

El funcionamiento de las trompetillas y bocinas utilizadas para dirigir la voz en determinada dirección se basa en las reflexiones que experimentan las ondas sonoras sobre las paredes de la bocina (fig. 416).

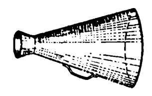


Fig. 416.—*En las bocinas se producen reflexiones de las ondas sonoras.*

§ 204. — **Vibraciones del diapasón; tubos, cuerdas y placas.** — Se ha visto ya que la superposición de dos ondas de igual frecuencia y amplitud, que se propagan en sentido contrario origina *ondas estacionarias*. Veremos que todas las fuentes sonoras funcionan produciendo ondas estacionarias.

El diapasón, ya hemos visto que consiste en una varilla prismática doblada y sostenida por su punto medio.

Golpeando el extremo de una de las ramas, se origina una onda que se propaga a lo largo de la varilla y al llegar al otro extremo se refleja volviendo a recorrerla en sentido contrario; vuelve luego a reflejarse en el primer extremo, y así sucesivamente.

La superposición de las ondas que recorren la varilla en uno y otro sentido da origen a la formación de ondas estacionarias. A los extremos corresponden vientres de vibración y en cada rama se forman 1, 2, 3, etc., nodos (fig. 417).

La frecuencia del sonido emitido depende del material de que está construído el diapasón (en rigor de la velocidad del sonido en él), y de las dimensiones (ancho y longitud de las ramas), no dependiendo del espesor, como ya se ha dicho. Manteniendo un diapasón en buenas condiciones, o sea preservándolo de golpes violentos o de cambios bruscos e intensos de temperatura, mantiene invariable su tiempo de oscilación. Por eso se los usa como **patrones de frecuencia** y en particular para medir el tiempo.

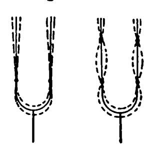


Fig. 417. — *Vibraciones en el diapasón.*

En los tubos sonoros la vibración se propaga en el aire contenido en un tubo prismático o cilíndrico.

La fig. 418 representa en corte un tubo abierto y uno cerrado.

El aire se insufla por la parte inferior, y al salir por la abertura M se encuentra con el bisel E donde se produce una vibración. pues la corriente de aire pasa alternativamente hacia el interior y hacia el exterior.

Se origina una onda que recorre el tubo y al llegar al

extremo superior se refleja produciéndose entonces ondas estacionarias.

Si el tubo es cerrado (fig. 418 b), como el aire próximo a la tapa no puede vibrar, se formará allí un nodo y en la embocadura un vientre de vibración.

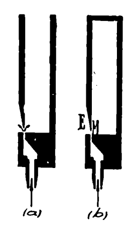


Fig. 418. — *Tubos sonoros abierto y cerrado.*

Luego, para la nota fundamental, la longitud del tubo corresponde a ¼ de longitud de onda, o sea:

$$\lambda = 4\, l$$

Pero también emite armónicos superiores en que la longitud del tubo corresponde a 3, 5, 7,... cuartos de longitud de onda, es decir, en general (fig. 419):

$$l = (2\, k + 1)\, \frac{\lambda}{4} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \qquad [21]$$

Emitirá una u otra nota según la presión del aire insuflado.

Si el tubo es abierto se produce el mismo fenómeno, pero entonces en la extremidad abierta debe formarse también un vientre de vibraciones. La nota fundamental corresponde al sonido en que la longitud del tubo es igual a media longitud de onda y en los armónicos sucesivos la longitud del tubo corresponde a un número entero de semilongitudes de onda (fig. 420).

$$l = k\, \frac{\lambda}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad [22]$$

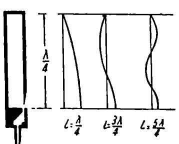


Fig. 419.—*Ondas estacionarias en un tubo cerrado*

Se observa entonces que, a igualdad de longitud, el tubo cerrado emite un sonido cuya longitud de onda es doble de la que corresponde al tubo abierto (frecuencia mitad).

Se obtendrán distintas notas con tubos de diferente longitud. La figura 363 muestra un conjunto de tubos que funcionan por el aire insuflado por una bomba de compresión.

Las cuerdas son fuentes sonoras, cuyo funcionamiento explicamos en forma semejante. Como los extremos de las cuerdas están fijos, en ellas se formarán nodos, de modo que

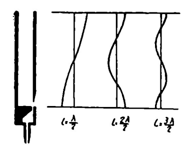


Fig. 420.—*Vibraciones en un tubo abierto.*

la longitud de la cuerda corresponde a un número entero de semilongitudes de onda (fig. 421):

$$l = k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \quad [23]$$

Se demuestra que la frecuencia fundamental de una cuerda está expresada por la fórmula:

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{m}} \quad [24]$$

siendo l su longitud, P la tensión de la cuerda y m la masa de la unidad de longitud.

Se comprueba con el aparato llamado sonómetro (figura 422).

Son muy interesantes los fenómenos de vibración de placas fijadas en su punto medio y golpeadas o frotadas en el borde. Se producen ondas estacionarias con líneas nodales fáciles de observar colocando arena muy fina sobre la placa. Al vibrar la placa, toda la arena se concentra sobre las líneas nodales (figura de Chladni).

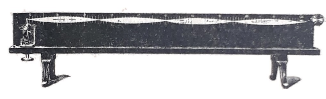


Fig. 421.—*Vibraciones de una cuerda.*

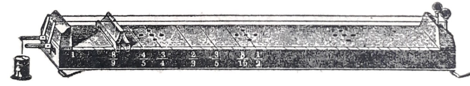


Fig. 422.—*Sonómetro para estudiar vibración de cuerdas.*

En la figura 423 se observan diversos efectos obtenidos en una placa cuadrada modificando el modo de excitación.

Se comprueba que una placa puede emitir diferentes sonidos y puede también producir distintas figuras.





Fig. 423.—*Vibración de placas.*

La nota fundamental que cada placa emite depende de la superficie, el espesor y el material de que está hecha.

§ 205.— **Acústica musical.** — Los sonidos puros son agradables al oído. Casi todos los instrumentos musicales emiten sonidos simples.

Cuando llegan al oído dos sonidos simples simultáneos (acorde) o sucesivos (melodía) producen una sensación más o menos agradable según la relación

$$i = \frac{N_1}{N_2}$$

entre sus respectivas frecuencias o alturas. Esta relación se denomina intervalo. Forman una octava dos sonidos en que el intervalo es $i = 2$, es decir, tales que el número de vibraciones de uno es doble que el del otro. Este intervalo es muy agradable al oído.

Dentro de la octava se clasifican las notas por su intervalo con respecto al primero. La *escala natural mayor*, corrientemente utilizada, se caracteriza por los siguientes intervalos:

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Como el intervalo de los sonidos perceptibles abarca varias octavas, se las distingue por un subíndice.

Así, por ejemplo, al la_3, corresponden 435 vibraciones y la escala de un piano común que abarca 7 octavas llega del la_{-2} al la_6.

Sus frecuencias son (fig. 425):

la_{-2}	la_{-1}	la_1	la_2	la_3	la_4	la_5	la_6
27.2	54.4	108.8	217.5	435	870	1740	3480

En la escala mayor hay tres tipos de intervalos:

Notas	Tipo	Intervalo
do - re fa - sol la - si	tono mayor	$i = \frac{9}{8}$
re - mi sol - la	tono menor	$i = \frac{10}{9}$
mi - fa si - do	semitono mayor	$i = \frac{16}{15}$

Se utilizan también los sostenidos y los bemoles. El inter-

valo entre la nota sostenida y la nota natural o entre la nota natural y la misma con bemol es un semitono menor cuyo

intervalo es $i = \frac{25}{24}$. Así, por ejemplo:

al do_3 corresponden 256 vibraciones

al re_3 $\frac{9}{8}$ $256 = 288$ vibraciones

al $do_3\#$ $\frac{25}{24}$ $256 = 266.6$

al re_3b $\frac{24}{25}$ $288 = 276{,}5$

Se observa que una nota sostenida no coincide exactamente con la que le sigue bemolizada. Sin embargo, por razones de simplicidad, en los instrumentos con teclados se sustituyen ambas por una sola, constituyendo la *escala templada* en que todos los intervalos son iguales a 1,05946. De acuerdo con ésto, cada octava del teclado de un piano tiene el aspecto de la fig. 424.



Fig. 424.—*Escala en el teclado del piano.*

Los intervalos más consonantes, es decir, los que producen mejor efecto al oído son:

Octava $i = 2$

Quinta $i = 3/2$ (p. ej.: do - sol)

Cuarta $i = 4/3$ (p. ej.: do - fa)

Un oído educado desde el punto de vista musical, percibe claramente estas consonancias y lo más curioso es que, al llegar a él un sonido proveniente de un acorde en que suenan dos o más notas a la vez, alcanza a distinguir cuáles son las notas que lo forman. Realiza así un análisis de la vibración que recibe, que es bastante compleja, distinguiendo vibraciones elementales componentes.

La fig. 425 da la ubicación, en la escala de frecuencias, de las voces humanas, las notas musicales y los intervalos que abarcan el piano y el órgano.

§ 206.— **Grabación del sonido. - Fonógrafos.** — Uno de los inventos más ingeniosos es el del fonógrafo, aparato mediante el cual se reproducen los sonidos que previamente se han registrado en un disco especial.

El sonido que se quiere grabar, llega a una membrana que trasmite las vibraciones a un estilete que pasa por una fina ranura en espiral marcada sobre un disco de una sustancia blanda. Quedan así registradas las vibraciones. Se hace una copia exacta con otra sustancia que luego adquiere consistencia, y al realizar el proceso inverso, una púa va repitiendo las vibraciones efectuadas por el estilete grabador; esas vibraciones se trasmiten a una membrana elástica que reproduce el sonido original (¹).

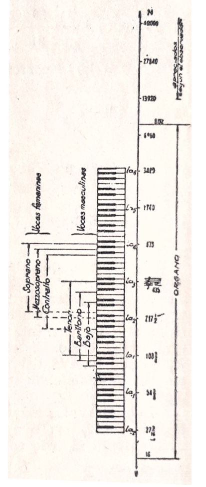


Fig. 425.—*Distribución de sonidos y voces de la escala musical.*

§ 207.— **Resonancia.** — Los fenómenos de resonancia se presentan en todos los capítulos de la física en que se estudian oscilaciones o vibraciones.

Podemos definirlos así: C u a n d o a u n a f u e n t e d e v i b r a c i o n e s l l e g a n o t r a s d e l a m i s m a n a t u r a l e z a y d e i g u a l p e r í o d o q u e l a s q u e e l l a e s c a p a z d e e m i t i r, c o m i e n z a a v i b r a r p o r r e s o n a n c i a.

El ejemplo más simple es el del péndulo doble de Oberbeck, de muy fácil realización. Se toman dos péndulos de igual longitud y se unen dos puntos cualesquiera con un hilo delgado *ACB* en cuya parte central se coloca un pequeño peso que lo mantenga estirado (fig. 426).

Si se hace oscilar uno de ellos, por ejemplo, el péndulo I dejando fijo al otro, se observará que después de unas cuantas oscilaciones, el segundo también oscila, y llegará un momento en que el I se ha detenido y toda la energía ha pasado al II, que oscila con máxima amplitud. Luego vuelve a oscilar el 1º,

(1) Existen también otros procedimientos para registrar y reproducir luego, a voluntad, los sonidos, tales como la impresión de películas (cine parlante) y el empleo de alambres que conservan influencia de campos magnéticos vinculados a los sonidos (dictáfonos, etc.).

y así sucesivamente. La energía pasa de uno al otro por *resonancia.*

Lo mismo ocurre con las fuentes sonoras; si frente a un tubo sonoro emitimos un sonido de la misma altura que el propio, comenzará a vibrar por *resonancia.*

Es muy fácil la experiencia que consiste en colocarse frente a un piano apretando el pedal "fuerte", con lo cual quedan las cuerdas libres para vibrar. Se emite entonces un sonido cualquiera y se notará que en el piano vibran varias cuerdas que reproducen la altura y el tono del sonido que se ha emitido.

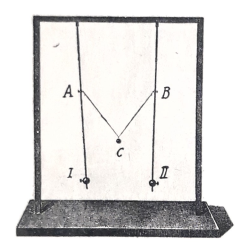


Fig. 426. — *Péndulo doble de Oberbeck para observar resonancia mecánica.*

En realidad en todas las fuentes sonoras que hemos mencionado, se producen fenómenos de resonancia. Cuando en el tubo sonoro vibra el aire en la embocadura, como se ha indicado en § 204, se produce allí una vibración muy compleja que es la superposición de muchas vibraciones simples. El tubo selecciona y refuerza, *por resonancia,* aquella capaz de producir las ondas estacionarias.

Si se golpea una campana ocurre algo semejante; en el lugar del choque se produce una vibración que es la suma de muchas vibraciones simples, de las cuales la campana selecciona *por resonancia* la que coincide con su vibración característica.

Es fácil realizar una experiencia de resonancia con un diapasón y una probeta de suficiente altura.

Se hace vibrar el diapasón y se acerca a la boca de la probeta mientras se vierte agua en ella (fig. 427). Cuando la distancia AB desde la boca a la superficie libre del agua, sea igual a la longitud del tubo cerrado que emite la misma nota que el diapasón, se reforzará el sonido, pues, la columna de aire comienza a vibrar por resonancia. En ese instante la longitud AB es igual a ¼ de la longitud de onda en el

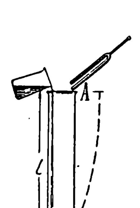


Fig. 427.—*Resonancia.*

aire o a un número impar de veces $\frac{\lambda}{4}$; pues se forman ondas estacionarias en el tubo, con un nodo de vibración en la superficie libre del agua y un vientre en la boca de la probeta.

El fenómeno se percibe con toda claridad.

Se comprende que, conocida la frecuencia n de vibración del diapasón y midiendo la longitud $AB = \frac{\lambda}{4}$ se puede calcular la velocidad de propagación del sonido en el aire.

$$v = n\,\lambda = 4\,n\,AB \quad [25]$$

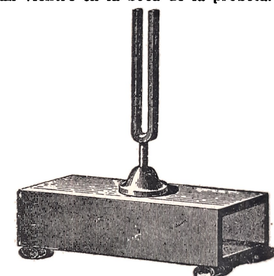


Fig. 428.—*Diapasón con caja de resonancia, cuya longitud es la de un tubo sonoro cerrado que emite la misma nota.*

De esta fórmula podemos deducir, sabiendo que v = 340 m/seg, que la longitud de la probeta que nos permitirá realizar la experiencia, debe ser:

$$L > \frac{340}{4n}\ (m) = \frac{85}{n}\ metro$$

Para analizar sonidos se construyen tubos cuya frecuencia de resonancia es conocida (fig. 429), llamados *resonadores*. Un conjunto de ellos con cápsulas manométricas adaptadas, se observa en la fig. 430.

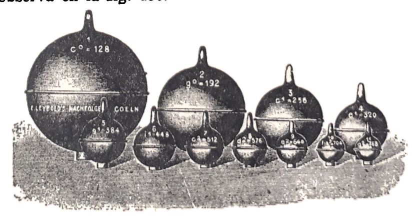
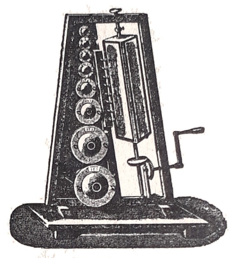


Fig. 429.—*Resonadores de Helmholtz para analizar sonidos.*

§ 208.—**Tubo de Kundt:** En este aparato, con el cual se mide la longitud de onda del sonido en el aire, se producen también fenómenos de resonancia.

Consta de un tubo aproximadamente de 1.5 m de longitud y unos 5 cm de diámetro, cerrado en uno de sus extremos con una membrana elástica y en el otro con un pequeño pistón que permite modificar la longitud l del tubo. En la membrana apoya un extremo de una varilla de vidrio o metal, de más o menos 1 metro de longitud fijada por su punto medio. (fig. 431).


Fig. 430.—*Conjunto de resonadores con cápsula manométrica para el análisis de un sonido complejo.*

Si mediante una gamuza con algo de resina o un corcho humedecido, se frota la varilla en sentido longitudinal, se producen vibraciones que consisten en acortamientos y alargamientos de la misma y se transmiten a la membrana elástica y de allí al aire del interior del tubo. Modificando la posición del pistón colocado en el otro extremo, se producirá resonancia, y por lo tanto, ondas estacionarias, cuando la longitud L sea igual a un número impar de cuartos de longitud de onda.

Para comprobarlo, se coloca a lo largo de una de las generatrices del tubo, algún polvillo liviano, como licopodio o corcho finamente dividido. Al producirse las ondas estacionarias, en los vientres de vibración se desparrama hacia los costados el polvillo liviano y en los nodos queda en reposo, obteniéndose la distribución de la figura 431, en que la distancia entre dos nodos sucesivos da la medida de la semilongitud de onda.

Dando por conocida la velocidad v del sonido en el aire, se puede calcular la frecuencia:


Fig. 431.— *Tubo de Kundt.*

$$n = \frac{v}{\lambda} \quad [26]$$

Esta es la misma que corresponde al sonido de la varilla que vibra con su punto medio fijo. Entonces la longitud de onda *en la varilla* será doble de su longitud L, pues se forma un vientre en cada extremo y un nodo en el centro, luego: $\lambda_v = 2\,L$ y la velocidad del sonido en la varilla:

$$V_v = n\lambda_v = 2\,n\,L = 2\,\frac{v}{\lambda}\,L \quad [27]$$

Los detalles más importantes que deben cuidarse al realizar la experiencia son: a) que la varilla esté sostenida exactamente por su punto medio y b) que el aire en el tubo esté bien seco, pues de lo contrario el polvillo húmedo se adhiere a las paredes y no vibra.

Llenando el tubo con diferentes gases y empleando siempre la misma varilla, puede determinarse la relación entre los distintos valores de la velocidad del sonido en los mismos; además de la velocidad del sonido en la varilla calculada con la fórmula [26].

§ 209.—**Medida de la longitud de onda por interferencias.** El método de Quincke para medir la longitud de onda del sonido en el aire, se basa en el hecho de que la suma de dos ondas de la misma longitud que se propagan en el mismo sentido con una diferencia de fase de 180° (medio período) o sea con una diferencia de camino de media longitud de onda, es una onda de amplitud nula.

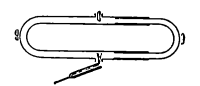


Fig. 432.—*Aparato de Quincke para medir longitudes de onda por interferencia.*

Se utiliza el aparato de la figura 432 formado por dos tubos, uno de los cuales es de longitud variable. Al vibrar el diapasón, penetra por *A* la onda sonora que se propaga por los tubos *ABC* y *ACD*. Si los dos tienen igual longitud se encuentran en *D* dos ondas en concordancia de fase y se percibe el sonido con máxima intensidad. Alargando el tubo *ACD*, cuando su longitud es media longitud de onda mayor que *ABC*, ambas ondas llegan en oposición de fase y el sonido se anula.

La diferencia de longitudes de ambos tubos, que se mide directamente en una regla adecuada, da la semilongitud de onda y por lo tanto λ.

En *D* puede colocarse directamente el oído o, para mayor sensibilidad, una cápsula manométrica de König (§ 201).

Conociendo la frecuencia de vibración del diapasón, puede calcularse la velocidad del sonido en el gas que llena los tubos, con la fórmula:

$$v = n\,\lambda$$

§ 210.—**Efecto Doppler.**—La frecuencia de un sonido depende de la velocidad relativa de la fuente y el observador. Cuando oímos el silbato de una locomotora que se acerca percibimos un sonido más agudo que cuando en las mismas condiciones la locomotora se aleja.

Cuando la fuente sonora se acerca, el observador percibe un sonido más agudo, cuando se aleja, más grave.

Lo mismo ocurre si el observador se acerca o se aleja de la fuente.

Las fórmulas que dan la variación aparente de frecuencia según que el observador se mueva con respecto a la fuente o la fuente con respecto al observador, son algo distintas. En este problema el movimiento se considera con referencia al medio elástico en que la onda se propaga.

Se obtienen las siguientes fórmulas:

a) El observador se acerca o aleja de la fuente:

$$n' = n\left(1 \pm \frac{v'}{v}\right)$$

b) La fuente se acerca o aleja del observador:

$$n' = n \frac{1}{1 \mp \frac{v'}{v}}$$

En ambas fórmulas el signo superior corresponde al caso de acercamiento; v' es la velocidad relativa y v es la velocidad del sonido en el medio en que se propaga.

CAPÍTULO XVII

TERMOMETRÍA

§ 211. — **Concepto de temperatura.** — 1. *Apreciaciones sensoriales.* — Nuestro sentido del tacto nos permite apreciar cierta característica en los cuerpos que tocamos, por la cual decimos que están *fríos, templados* o *calientes.*

Diremos que por esa apreciación distinguimos los distintos **estados térmicos** de los cuerpos.

Pero tal apreciación de nuestros órganos sensoriales tiene un valor muy relativo, pues está sujeta a error debido a la influencia de sensaciones anteriores.

Un ejemplo clásico nos convencerá de ello. Tomemos tres recipientes (figura 433), uno con agua *caliente,* otro con agua *fría* y el tercero con agua *tibia;* colocando una mano en cada uno de los primeros sentiremos *calor* y *frío,* respectivamente.

Pero si después de unos instantes introducimos simultáneamente ambas manos en el agua *tibia,* la mano que estaba

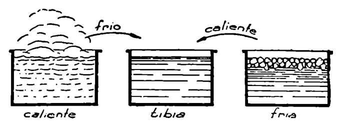


Fig. 433.—*La noción subjetiva de estado térmico está sujeta a error.*

en el agua caliente nos dará la sensación de *frío* y la otra de *caliente.*

Es necesario, pues, buscar definiciones del *estado térmico* de los cuerpos en los que no intervenga la apreciación sensorial directa del observador.

2. *Indices de estado térmico.* — La experiencia prueba que las propiedades físicas de los cuerpos dependen de su *estado térmico.*

Lo hemos tenido en cuenta al estudiar la ley de Boyle-Mariotte, la velocidad de propagación del sonido y el coeficiente de viscosidad.

Quiere decir que el valor de las constante físicas (volumen, densidad y otras que estudiaremos más adelante) nos permitirá caracterizar estados térmicos prescindiendo de nuestras apreciaciones sensoriales directas.

3. *Equilibrio térmico.* — Al poner en contacto dos cuerpos en distinto estado térmico, observaremos que modifican sus propiedades físicas (por ejemplo, el volumen), pero después de cierto tiempo, llegan a un estado final en el que aquéllas permanecen constantes. Cuando esto sucede decimos que los cuerpos están *en el mismo estado térmico.*

Como los demás cuerpos pueden influir térmicamente sobre los dos considerados, debemos, a fin de dar rigor a la noción de equilibrio térmico, definir como sigue la igualdad y desigualdad de estados térmicos.

Imaginemos recipientes construídos con materiales tales que el estado térmico de los cuerpos situados en su interior no se modifique por la acción de cuerpos exteriores [1].

Dos cuerpos se encuentran en el mismo estado térmico cuando, colocados en contacto dentro de uno de esos recipientes, no modifican sus propiedades físicas.

Se encuentran en distinto estado térmico cuando, en las mismas condiciones, modifican mutuamente sus propiedades.

4. *Ordenamiento de estados térmicos. - Temperatura.* — Hemos definido la igualdad de estados térmicos, pero no nos es posible definir su *suma.* Por tanto, el estado térmico de un cuerpo no es susceptible de medida.

De ello concluimos que no se trata de una magnitud física.

Observando el sentido en que se producen las modificaciones de las propiedades físicas de los cuerpos tomados en la comparación, podemos establecer un *sentido* de variación en los estados térmicos. Aceptaremos a ese efecto que los cuerpos *más calientes* están en un estado térmico *más elevado* que los más fríos.

Podremos así establecer, entre varios estados térmicos, un ordenamiento tal que cada uno sea superior a los anteriores.

(1) Estos recipientes constituyen lo que se llama una *envoltura adiabática.*

Por ejemplo: tomemos varios recipientes con las siguientes sustancias: una mezcla de hielo y agua en el 1°; alcohol hirviendo en el 2°, y agua hirviendo en el 3°.

Si colocamos un cubito de hierro, sucesivamente en cada uno de los recipientes: observaremos que su volumen varía; notaremos que en el 2° recipiente el volumen es mayor que en el 1°, y en el 3° es mayor que en el 2°.

Luego diremos: los estados térmicos están escalonados en el orden mencionado en que crecen los volúmenes del cuerpo utilizado como testigo.

Es cómodo determinar las diferencias de estado térmico, midiendo las variaciones aparentes de volumen que experimenta un líquido colocado en un recipiente de vidrio, como el de la fig. 434. Cuando aumenta el volumen, diremos que el estado térmico crece, y recíprocamente.

En estados térmicos iguales el líquido llegará al mismo nivel (suponemos que la presión es siempre la misma).

Una vez establecidos los conceptos de igualdad y prevalencia (mayor y menor) de los estados térmicos, podremos asignarle a cada uno un número, estableciendo así una *escala* arbitraria que constituye un elemento, *no de medida,* pero sí de *comparación* de los estados térmicos.

Se la llama **escala de temperaturas** y el número asignado a cada estado térmico será la *temperatura correspondiente.*



Fig. 434. — *Aparato para comparar estados térmicos.*

§ 212.— **Termómetro.** — Si al aparato de la fig. 434 le agregamos una escala numerada en forma creciente de abajo hacia arriba, tendremos un **termómetro.** A cada volumen del líquido le corresponderá *una temperatura,* leída en la escala, de acuerdo a la posición de la parte superior de la columna líquida.

La graduación es arbitraria, pero válida siempre que se respete el sentido de prevalencia establecido.

§ 213.— **Puntos fijos fundamentales. - Escala centigrada de mercurio.** — Con el aparato de la figura 434 comprobamos que en ciertas condiciones algunas sustancias presentan siempre el mismo estado térmico, o sea la misma temperatura.

Por ejemplo, el hielo mientras se funde, los líquidos que hierven a presión exterior constante, etc. Esas temperaturas se suelen elegir como **puntos fundamentales.**

En la escala centigrada se designa 0° (cero grado) la temperatura del hielo fundente y 100° (cien grados) la del agua pura en ebullición a presión normal (760 mm de Hg).

Obtenemos la *escala centigrada de mercurio* del siguiente modo: medimos la variación aparente de volumen entre 0° y 100° del mercurio colocado en un recipiente de vidrio, y la dividimos en 100 partes iguales, asignando a esas divisiones la serie de los números naturales de 1 a 100 que llamamos grados centigrados en escala de mercurio.

Podemos, pues, definir: **un grado centigrado** como la variación de temperatura que produce una variación aparente de volumen, igual a un centésimo del aumento aparente de volumen del mercurio contenido en un recipiente de vidrio, cuando se lo lleva del punto de fusión del hielo al de ebullición del agua a presión normal.

Para ser más correctos debe especificarse en qué clase de vidrio está colocado el mercurio, pues no en todos los vidrios la variación aparente de volumen sigue la misma ley. Existen fábricas de vidrio mundialmente conocidas (Jena) que producen tipos especiales de vidrios para termómetros, cuyas propiedades son siempre las mismas.

§ 214. — **Otras escalas termométricas.** — Se comprende que la escala centigrada que hemos definido es completamente arbitraria.

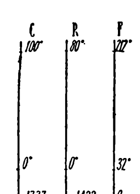


Fig. 435. — *Comparación de escalas termométricas.*

Se utilizan en algunos países las siguientes escalas:

Réamur: con los mismos puntos fijos que la centigrada, pero asignándole los números 0° R y 80° R.

Fahrenheit: punto fijo inferior: temperatura de una mezcla de hielo y cloruro de amonio (O° F) y punto fijo superior: vapor de agua en ebullición a presión normal con el número 212° F.

En esta escala la temperatura del hielo fundente es 32° F.

La correspondencia entre estas tres escalas es entonces:

$$100° C = 80° R = 180° F$$

Se deduce fácilmente que, dada una temperatura en una escala, se expresa en las otras escalas con las fórmulas:

$$C = \frac{5}{4} R = \frac{5}{9} (F - 32) \quad (*) \qquad [1]$$

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{9} (F - 32) \qquad [2]$$

$$F = \frac{9}{5} C + 32 = \frac{9}{4} R + 32 \qquad [3]$$

Ejemplo:

La temperatura normal del cuerpo humano es 37° C. Expresarla en grados Reamur y Farenheit.

Respuesta: Aplicando las fórmulas [2] y [3]

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4 \times 37}{5} = 29°,6\ R$$

$$F = \frac{9}{5} C + 32 = 98°,6\ F$$

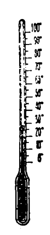


Fig. 436. — *Graduación del termómetro.*

§ 215.—**Termómetros; diversos tipos.** — Hemos dicho ya en qué consiste el termómetro de mercurio. Para facilitar las lecturas se construyen de modo que las variaciones de volumen del mercurio se aprecien en un tubo de pequeño diámetro interior (tubo capilar). Eligiendo capilares de sección perfectamente constante, la graduación estará formada por segmentos de igual longitud. Bastará colocar el termómetro en hielo fundente y marcar el nivel que alcanza el mercurio, luego colocarlo en vapores de agua en ebullición y marcar el punto 100°. Dividiendo la longitud comprendida entre ambos trazos en 100 partes iguales, se tendrá también el volumen dividido en 100 partes, y, por lo tanto, marcados los grados centigrados.

Extendiendo las mismas divisiones por encima de 100 y por debajo de 0° ampliamos el alcance de la escala centigrada. A las temperaturas inferiores a 0° les atribuimos signo negativo.

(*) Para una determinada temperatura, la longitud de la columna termométrica, contada a partir del cero centígrado, corresponderá a valores distintos en las tres escalas, a los que llamaremos C, R y (F — 32°). Estos valores cumplen las relaciones:

$$\frac{C}{R} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4} \quad y \quad \frac{C}{F - 32°} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

De ellas se deducen las relaciones [1], [2], y [3].

El mercurio sirve como líquido termométrico dentro de ciertos límites, pues solidifica a — 39° y se evapora a 360°. Para temperaturas inferiores se utilizan alcoholes como líquidos termométricos y para temperaturas muy elevadas se utilizan termómetros a gas o de otros tipos especiales (pirómetros ópticos, eléctricos, etc.).

Fig. 437.—*Termómetros de máxima y de mínima.*

Cuando se desea registrar la temperatura máxima o la mínima, en un determinado período de tiempo, se utilizan los termómetros de máxima o los de mínima. Los primeros son termómetros de mercurio en que el menisco empuja un índice al aumentar la temperatura y lo deja en su lugar al disminuir.

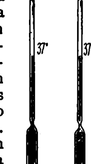


Fig. 438.—*Termómetro clínico de máxima.*

Los de mínima son a alcohol y el índice está colocado dentro de la columna líquida de modo que es arrastrado por el menisco cuando la temperatura disminuye y queda en su lugar cuando aumenta (fig. 437).

El termómetro clínico (fig. 438) tiene un extrangulamiento entre el bulbo y el tubo capilar; cuando se enfría el primero la columna mercurial se corta quedando retenida la parte superior *en el nivel máximo alcanzado.*

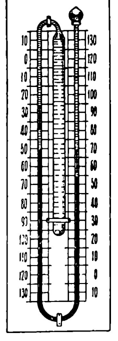


Fig. 439.—*Termómetro de máxima y mínima.*

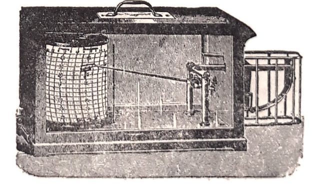


Fig. 440.—*Termómetro registrador.*

Otros termómetros son al mismo tiempo de máxima y mínima.

En el modelo de la fig. 439, según aumente o disminuya la temperatura sube el mercurio a la derecha o a la izquierda empujando los índices. Estos se quedan en la posición más alta alcanzada retenidos por un pequeño resorte de acero ajustado al tubo; se los vuelve a bajar con ayuda de un imán.

En algunos casos el líquido que se dilata mueve un índice que se desplaza frente a un cilindro giratorio donde se registra la temperatura (fig. 440).

§ 216.—**Verificación de un termómetro:** En las mediciones de precisión es necesario previamente, conocer la exactitud del termómetro con que se opera.

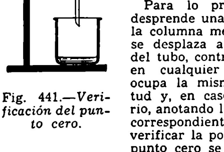


Fig. 441.—*Verificación del punto cero.*

Aún en los buenos termómetros debe algunas veces realizarse este estudio.

Los puntos a controlar son los siguientes: a) calibración del tubo; b) verificación del punto cero; c) verificación del punto cien.

Para lo primero se desprende una parte de la columna mercurial y se desplaza a lo largo del tubo, controlando si en cualquier posición ocupa la misma longitud y, en caso contrario, anotando los errores correspondientes. Para verificar la posición del punto cero se coloca el termómetro en hielo fundente anotando la lectura (error del cero) cuando se ha estabilizado la indicación.

Para el punto cien se coloca el termómetro en vapor de agua en ebullición de modo que quede completamente rodeado por el mismo (aparato de Regnault). (Fig. 442).

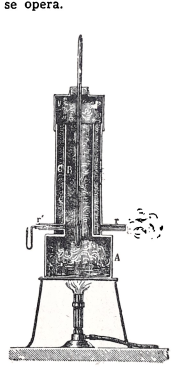


Fig. 442.— *Aparato de Regnault para verificar el punto cien.*

Se lee la temperatura que indica y se compara con la que debiera marcar, sabiendo que la temperatura del vapor de agua en ebullición es 100º, si la presión exterior es de 760 mm de mercurio. Si la presión es mayor se calcula la temperatura de ebullición, aumentando 0.038 grado centígrado por cada milímetro de aumento en la presión y si es menor se restará a 100º, 0,038 grado por cada milímetro que la presión esté debajo de 760 mm.

Estas correcciones deben repetirse cada cierto tiempo, pues las variaciones de temperatura a que está sometido el vidrio alteran algo sus propiedades. En las fábricas se procede a "envejecer" los termómetros antes de graduarlos para reducir al mínimo las variaciones posteriores.

CAPÍTULO XVIII

DILATACIÓN DE SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

§ 217.—**Dilatación de sólidos.** — Cuando se calienta un cuerpo se observa que sus dimensiones aumentan; en esto consiste la **dilatación.**

Al aumentar las dimensiones lineales del cuerpo se producen los correspondientes aumentos de su volumen y de la extensión de su superficie.

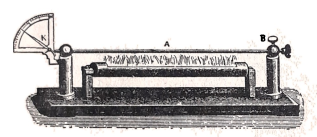


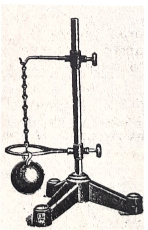
Fig. 443.—*Pirómetro de cuadrante.*

La fig. 443 muestra el aparato, llamado *pirómetro de cuadrante,* con el que se prueba la dilatabilidad de varillas de distintos metales en la dirección de su longitud.

Calentada la varilla A, con su extremo B fijado por un tornillo de presión, se dilata, empujando la parte inferior de la aguja K, cuyo extremo recorre un cuadrante graduado.

Cambiando la varilla A por otra de distinta sustancia, podrán notarse diferentes valores del desplazamiento de K.

Para comprobar la dilatación cúbica de los sólidos, emplearemos el aparato llamado anillo de Gravesande (fig. 444). Una esfera de cobre o latón a la temperatura ambiente, pasa ajustada por un anillo que puede correrse sobre el soporte vertical del aparato.


Fig. 444.—*Anillo de Gravesande.*

Después de calentada la esfera se observa que no puede pasar por el anillo a causa de que su volumen ha aumentado.

Si la esfera y el anillo se calentaran simultáneamente, y

fueran del mismo material, la esfera seguiría pasando, pues también se dilataría el anillo proporcionalmente.

Si los materiales fueran distintos, dependería de cuál de los dos se dilata más a igualdad de variación de temperatura, pues cada sustancia tiene su coeficiente de dilatación.

§ 218. — **Coeficiente de dilatación lineal de un sólido.** — Sea una varilla BC, supuesta inicialmente a la temperatura de 0 grados, y llamemos l a su longitud (fig. 445).

Calentada a t grados su longitud se hará igual a l_t = BC', habiéndose dilatado en una longitud:

Fig. 445.—*Dilatación lineal.*

$$CC' = l_t - l_o \qquad [1]$$

Se ha comprobado que esta dilatación es proporcional a la longitud inicial l_o, y (dentro de ciertos límites) a la variación de temperatura.

Llamaremos **coeficiente medio de dilatación lineal** de la sustancia que forma la barra, entre 0° y t° centigrados, al valor:

$$\lambda = \frac{l_t - l_o}{l_o\, t} \qquad [2]$$

el cual representa el aumento medio de longitud por cada unidad de longitud inicial y por cada grado de temperatura.

Los coeficientes de dilatación lineal de los sólidos son del orden de 10^{-5}. Como el grado de temperatura es un número abstracto, también lo será λ, de acuerdo a la fórmula [2] que lo define.

Así, cuando decimos que el coeficiente de dilatación lineal del hierro es $\lambda = 0{,}000011$, queremos significar que por cada grado de aumento de temperatura, una barra de este material experimenta un aumento de longitud igual a 11 millonésimos de su longitud a 0°.

§ 219. — **Binomio de dilatación.** — De acuerdo a la definición que antecede, la dilatación total CC' de la barra, puede expresarse por la relación:

$$l_t - l_o = \lambda\, l_o\, t \qquad [3]$$

Despejando en ella el valor l_t de la longitud a t°, resulta:

$$l_t = l_o + l_o\, \lambda\, t$$

o también, sacando el factor común l_0:

$$l_t = l_0 \ (1 + \lambda \ t)$$

El factor $(1 + \lambda \ t)$ se llama **binomio de dilatación.**

Aplicaciones numéricas. — a) Una barra de cobre es calentada de 0° a 150°. Su longitud inicial es $l_0 = 250$ cm, y su coeficiente medio de dilatación $\lambda = 0{,}0000185$.

Se pide la longitud a 150°.

$$l_t = l_0 \ (1 + \lambda \ t) = 250 \ (1 + 0{,}000018 \times 150) = 250 \times 1{,}0027 \text{ cm}$$

$$l_t = 250{,}675 \text{ cm}$$

El alargamiento total ha sido:

$$l_t - l_0 = 0{,}675 \text{ cm} = 6{,}75 \text{ mm}$$

b) Una barra de hierro tiene longitud $l_1 = 5$ m a la temperatura $t_1 = 20°$; calcular su longitud a temperatura $t_2 = 100°$ sabiendo que su coeficiente medio de dilatación lineal es $\lambda = 0{,}000011$.

Las longitudes a 20° y 100° tienen por expresión:

$$l_1 = l_0 \ (1 + \lambda \ t_1)$$

$$l_2 = l_0 \ (1 + \lambda \ t_2)$$

Despejando de la primera el valor de l_0, y sustituyéndolo en la segunda, resulta:

$$l_2 = \frac{l_1}{1 + \lambda \ t_1} \ (1 + \lambda t_2)$$

y sustituyendo:

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \lambda t_2}{1 + \lambda t_1} = 5 \ m \ \frac{1 + 0{,}000011 \times 100}{1 + 0{,}000011 \times 20} = 5{,}004395 \ m$$

El alargamiento total es: 4,395 mm.

Puede calcularse aproximadamente el valor de l_2 con la fórmula:

$$l_2 = l_1 \ [1 + \lambda \ . \ (t_2 - t_1)]$$

la que en el caso presente da:

$$l_2 = 5 \ [1 + 0{,}000011 \ (100 - 20)] = 5 \times 1{,}00088 = 5{,}0044$$

teniéndose un resultado suficientemente aproximado.

§ 220. — **Medida de coeficientes de dilatación lineal.** — Para determinar los valores de λ se puede emplear el método de Lavoisier y Laplace. La figura 446 representa en esquema el dispositivo de medida.

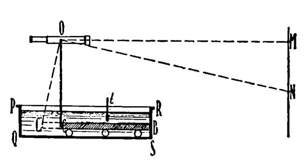


Fig. 446.—*Método para la medida del coeficiente de dilatación lineal.*

La barra BC está colocada en un recipiente PQRS inicialmente con hielo en fusión y tiene la longitud l_0.

El punto B está fijo, mientras que en el *C* apoya un brazo metálico CO ligado a un anteojo, con el que se observa una regla graduada; se hace la lectura de la división M coincidente con el eje óptico del anteojo.

Calentando el recipiente se funde el hielo, y luego el agua de fusión aumenta de temperatura; mientras tanto, C se desplaza hacia C', y el anteojo se inclina.

A una temperatura $t°$ leída en termómetros distribuídos convenientemente, la dilatación total es CC', y la nueva lectura del anteojo en la regla es: *N*.

Los triángulos semejantes COC' y MON dan:

$$\frac{CC'}{CO} = \frac{MN}{OM}$$

$$CC' = \frac{CO}{OM} MN. \qquad [5]$$

Como CO y OM son medidas fijas del aparato, bastará con medir MN para tener la dilatación $CC' = l_t - l_0$.

Como se conocen la longitud inicial l_0 y la temperatura t°, se puede calcular λ:

$$\lambda = \frac{CC'}{l_0 \cdot t} \qquad [6]$$

Cambiando la temperatura final t, cambia el valor λ, y es por esto que lo hemos definido como *coeficiente medio entre 0° y t°*.

La tabla XIII consigna algunos valores entre 0° y 100°.

TABLA XIII

COEFICIENTES MEDIOS DE DILATACION LINEAL

ENTRE 0° Y 100°

Acero	0,0000120	Plata	0,0000197
Acero "Invar" ($\frac{3}{10}$ Ni)	0,0000009	Platino	0,0000090
Aluminio	0,0000238	Plomo	0,0000292
Bronce	0,0000175	Sodio	0,0000260
Cobre	0,0000165	Vidrio "pirex"	0,0000030
Hierro	0,0000122	" común	0,0000090
Niquel	0,0000130	Zinc	0,0000165

§ 221. — **Aplicaciones de la dilatación lineal de sólidos.** — 1. *Par bimetálico.* — La diferencia de los coeficientes de dilatación de dos sustancias puede ponerse en evidencia con el siguiente experimento:

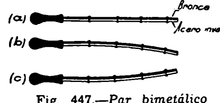


Fig. 447.—*Par bimetálico*

Una planchuela de bronce y otra de acero "invar" de igual tamaño son remachadas y colocadas en un mango de madera (fig. 447 a).

Llevado este par bimetálico sobre un mechero de Bunsen, se dobla en la forma indicada por la fig. 447 b, debido a que el bronce se dilata más, pues su coeficiente es casi 20 veces mayor que el del "invar".

Enfriado fuertemente el par se dobla en sentido contrario (fig. 447 c).

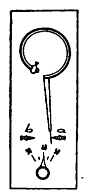


Fig. 448.—*Termostato al enfriarse, el par bimetálico cierra circuito en* a, *al calentarse en* b.

Esta propiedad se aplica para la construcción de ***termostatos*** **(aparatos que abren y cierran un circuito eléctrico cuando un recinto llega a temperaturas dadas, entre las que se lo quiere mantener), para los termómetros metálicos, y** los volantes compensados de los péndulos elásticos de los relojes de bolsillo (figuras 448, 449 y 450).

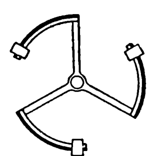
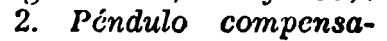


Fig. 449.—*Volante compensado. El periodo se mantiene constante aunque cambie la temperatura.*



2. *Péndulo compensa-*

dor. — Debido a la propiedad del péndulo de que sus oscilaciones de pequeña amplitud son isócronas, se lo emplea para la medición del tiempo, sea directamente, o haciéndole regular el escape de los dientes de una rueda, accionada por una pesa suspendida o por la fuerza de un resorte arrollado.

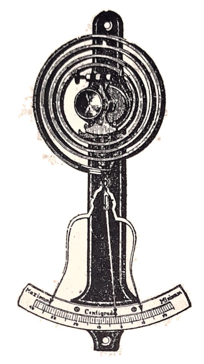


Fig. 450.—*Termómetro metálico.*

Para que los cambios de temperatura no modifiquen la longitud, y, por lo tanto, el tiempo de oscilación del péndulo, se construyen los **péndulos compensadores**, en los cuales se trata que la posición del centro de gravedad no se modifique.

El más simple es el péndulo formado por una varilla metálica con un recipiente cilíndrico de vidrio, lleno de mercurio en su parte inferior. Al aumentar la temperatura se alarga la varilla, pero también se dilata el mercurio del recipiente y aumenta de nivel (fig. 451), compensando el alargamiento con el ascenso del centro de gravedad

Más corrientes son los péndulos de parrilla, construídos con varias barras de distintos metales, en que el descenso de la lenteja producido por el alargamiento de unas, se compensa por el ascenso que produce el alargamiento de otras (fig. 452).



Fig. 451.—*Péndulo compensador de mercurio.*

Supongamos que las varillas designadas *F* en la figura son de hierro y las designadas Z son de bronce.

Si el alargamiento de la varilla de hierro de longitud $L = A'B + C'D$ es igual al de la varilla de bronce de longitud $l = B'C$, la posición de la lenteja no varía. Para ello, siendo λ_1 y λ_2 los coeficientes de dilatación del hierro y bronce, respectivamente, debe verificarse:

$$L \lambda_1 t = l \lambda_2 t$$

para cualquier valor de *t*.

Es decir:

$$L\,\lambda_1 = l\,\lambda_2 \qquad [7]$$

o sea:



$$\frac{L}{l} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad [8]$$

Siendo la relación

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0{,}000018}{0{,}000012} = \frac{3}{2}$$

debe ser:

$$\frac{L}{l} = \frac{3}{2} \qquad [9]$$

Fig. 452.— *Péndulo compensador.*

Para obtener compensación será necesario que correspondan tres varillas de hierro a dos de bronce de igual longitud; por lo tanto, el aspecto del péndulo será el de la fig. 453 con 9 varillas.

§ 222.— **Fuerzas obtenidas por la dilatación.** — Si se trata de impedir que se dilate una barra metálica que se calienta, o de que se contraiga después de dilatada, se ponen en juego fuerzas, en general, muy grandes.

La figura 454 muestra un aparato para evidenciar estas fuerzas (aparato de Tyndall).

Una barra gruesa de hierro está apoyada sobre un sólido soporte. En un extremo tiene un agujero por el que pasa una varilla de hierro u otro metal, y en el otro una tuerca que se le atornilla ajustando la varilla contra el soporte.

Calentada la barra en estas condiciones, se dilata aflojándose la varilla, pero girando la tuerca se la vuelve a ajustar en caliente.

Al enfriarse, la varilla transversal se corta por efecto de la fuerza desarrollada.

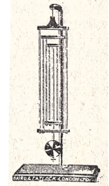


Fig. 453.—*Péndulo compensador de hierro y bronce.*

Esta fuerza se puede calcular conociendo la dilatación de la barra y su módulo de elasticidad E.

Ella equivale a la fuerza que habría que aplicar para producir elásticamente el mismo alargamiento, sin cambiar la temperatura.

Dada una barra de módulo de elasticidad E, la fuerza necesaria para aumentar su longitud, en un valor Δl es:

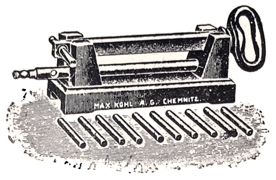


Fig. 454.—*Aparato para observar las fuerzas que se obtienen por dilatación.*

$$F = E \cdot S \frac{\Delta l}{l}$$

Si Δl es producido por una variación de temperatura $(t_2 - t_1)$, se tiene:

$$\Delta l = l \lambda (t_2 - t_1)$$

Reemplazando:

$$F = E S \lambda (t_2 - t_1) \quad [10]$$

y por cada cm^2 de sección y por grado de variación de temperatura:

$$f = E \lambda \quad [11]$$

Para el hierro resulta:

$$f = 2\,000\,000 \times 0{,}000012$$

$$f = 24 \frac{Kgr}{cm^2}$$

Si en la aplicación de la figura 454, la elevación de temperatura fué de 200°, y la sección de la barra de 2 cm^2, la fuerza total F puede llegar a ser:

$$F = 24 \times 200 \times 2 = 9600\ Kgr$$

$$F = 9{,}6\ toneladas$$

§ 223. — **Dilatación anómala del caucho.** — Un tubo de caucho AB estirado por la acción de un peso P, presenta el curioso fenómeno de acortarse al ser calentado.

La figura 455 muestra un dispositivo práctico para comprobarlo; el tu-

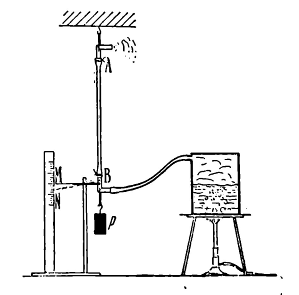


Fig. 455.—*Instalación para comprobar la dilatación anómala del caucho.*

bo AB se calienta haciendo circular en su interior vapor de agua a 100°, observándose entonces que el extremo M de la aguja BM se corre hacia abajo sobre la escala vertical MN, lo que implica un acortamiento del tubo.

Con determinaciones precisas es posible siempre comprobar que el volumen del tubo aumenta, a pesar del acortamiento, y, por tanto, que el caucho se dilata al elevar su temperatura.

La contracción longitudinal observada se explica por una variación motivada por el cambio de temperatura, en el valor del módulo de elasticidad por tracción E.

§ 224. — **Dilatación cúbica. - Coeficiente.** — En rigor, la dilatación lineal estudiada no es más que un aspecto del cambio de volumen que experimentan los cuerpos y que constituye su dilatación cúbica.

Si un cuerpo que a 0° tiene el volumen V_0, al ser calentado a t° adquiere el volumen V_t, su dilatación total es:

$$\Delta V = V_t - V_0 \qquad [12]$$

Llamaremos *coeficiente medio de dilatación del cuerpo entre 0° y t°* al valor

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 \cdot t} \qquad [13]$$

que puede definirse como el valor medio del **aumento de volumen que experimenta cada unidad de volumen del cuerpo al elevar en 1° su temperatura,** entre los límites 0° y t°.

Así, al decir que el coeficiente de dilatación cúbica del platino es: $\gamma = 0{,}000027$ queremos significar que 1 cm^3 de platino, al elevar en 1° su temperatura, aumenta su volumen en 27 millonésimos de cm^3. Como el valor es diferente según se pase de 0° a 1°, de 11° a 12°, etc., se toma el valor medio entre 0° y la temperatura final de cada experiencia. Las tablas especifican en cada caso los límites que se han tomado.

§ 225. — **Binomio de dilatación.** — De la fórmula [13] se deduce:

$$V_t - V_0 = \gamma \cdot V_0 \cdot t$$

y, por tanto:

$$V_t = V_0 + \gamma \cdot V_0 \cdot t$$

de donde:

$$V_t = V_0 \ (1 + \gamma t) \qquad [14]$$

Esta expresión permite calcular el volumen de un cuerpo a t°, partiendo de su volumen a 0° y del valor del coeficiente γ.

El valor $(1 + \gamma t)$ es el binomio de dilatación.

Para pasar del volumen V_1 de un cuerpo a t°_1 al volumen V_2 del mismo t°_2 se procede como sigue:

Aplicando la fórmula 14 a la temperatura t_1 se tiene:

$$V_1 = V_0 \ (1 + \gamma t_1)$$

De ella se saca el volumen a 0°:

$$V_0 = \frac{V_1}{1 + \gamma t_1} \qquad [15]$$

Escribiendo ahora la fórmula [14] para la temperatura t_2, y reemplazando el valor V_0 de la [15]:

$$V_2 = V_1 \ \frac{1 + \gamma t_2}{1 + \gamma t_1} \qquad [16]$$

Aproximadamente puede calcularse V_2 con la fórmula:

$$V_2 = V_1 \ [1 + \gamma \ (t_2 - t_1) \ ] \qquad [17]$$

§ 226. — **Relación entre los coeficientes λ y γ.** — Puede demostrarse que prácticamente el coeficiente de dilatación cúbica γ. es igual al triple del coeficiente de dilatación lineal.

$$\gamma = 3 \ \lambda \qquad [18]$$

Para ello imaginemos un cubo de la sustancia dada, cuya arista mide l_0 a la temperatura de 0°. Su volumen a 0° será:

$$V_0 = l_0^3 \qquad [19]$$

Calentando a t_0, su volumen se hace V_t y cada arista toma la longitud:

$$l_t = l_0 \ (1 + \lambda t)$$

El volumen V_t será:

$$V_t = l_t^3 = l_0^3 \ (1 + \lambda t)^3 \qquad [20]$$

Teniendo en cuenta las fórmulas [14] y [19] se puede expresar este volumen como sigue:

$$V_t = V_0 \, (1 + \gamma t) = l_0^3 \, (1 + \gamma t)$$

Igualando los valores de V_t, se tiene:

$$l_0^3 \, (1 + \gamma t) = l_0^3 \, (1 + \lambda t)^3$$

y por tanto:

$$1 + \gamma t = (1 + \lambda t)^3 = 1^3 + 3 \, \lambda t + 3 \, \lambda^2 \, t^2 + \lambda^3 \, t^3$$

y como el valor de λ es muy pequeño, su cuadrado y su cubo son valores despreciables en general, pudiéndose poner simplemente:

$$1 + \gamma t = 1 + 3 \, \lambda t$$

De donde:

$$\gamma = 3 \, \lambda \qquad [21]$$

§ 227. — **Variación de la densidad con la temperatura.** — Llamando V_0 el volumen de un cuerpo a 0° y M a su masa, la densidad o *masa específica* correspondiente a dicha temperatura es:

$$\delta_0 = \frac{M}{V_0} \qquad [22]$$

Al calentar el cuerpo a t°, la masa M no cambia, pero el volumen aumenta y, por tanto, la densidad disminuye, adquiriendo el valor:

$$\delta_t = \frac{M}{V_t} = \frac{M}{V_0 \, (1 + \gamma t)} = \frac{M}{V_0} \, \frac{1}{1 + \gamma t} \qquad [23]$$

y de acuerdo a la [22]

$$\delta_t = \frac{\delta_0}{1 + \gamma t} \qquad [24]$$

Deseándose reducir a 0° la densidad hallada para t°, se aplica la fórmula, deducida de la anterior:

$$\delta_0 = \delta_t \, (1 + \gamma t) \qquad [25]$$

La densidad a 0° es igual a la densidad a t° multiplicada por el binomio de dilatación.

Esa misma relación puede establecerse para los pesos específicos ρ_t y ρ_0, ya que se obtienen multiplicando por la aceleración *g*, valor constante, las respectivas densidades.

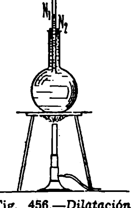


Fig. 456.—*Dilatación de líquidos.*

$$\rho_0 = \rho_t \, (1 + \gamma t) \qquad [26]$$

§ 228.—**Dilatación de líquidos.**—Puede comprobarse la dilatabilidad de los líquidos con la experiencia indicada en la figura 456.

Un balón con agua coloreada lleva un tubito en su parte superior; el líquido llega al nivel N_1 cuando está a la temperatura del ambiente.

Al calentar el balón se *observa primero un descenso del líquido hasta el nivel N_2, y luego un ascenso continuado hasta alcanzar un límite superior N_3.*

Para explicarnos el fenómeno debemos tener presente que, además de la dilatación del líquido, interviene en él la del recipiente que lo contiene.

Al principio, se calienta fuertemente este último, y su aumento de volumen hace bajar el nivel a N_2, mostrando una aparente contracción del líquido. Pero en cuanto aumenta la temperatura de éste, su dilatación sobrepasa a la del balón que lo contiene, subiendo el nivel hasta N_3.

§ 229.—**Dilatación aparente y real de los líquidos. - Dilatómetro.** — Para estudiar en forma precisa la dilatación de los líquidos se emplean los dilatómetros. La figura 457 muestra en esquema uno de estos aparatos, formando por un recipiente R y un tubo calibrado cuyas divisiones permiten apreciar fracciones de cm^3.

Se conoce exactamente el volumen V contenido a 0° hasta el enrase N, y las divisiones del tubo están graduadas para esta temperatura. (Estas determinaciones previas se hacen por pesadas y colocando mercurio hasta distintos niveles en el tubo).

Si colocamos líquido en R hasta llegar al enrase N manteniendo la temperatura a 0°, sabemos que su volumen es V_0.

Calentando el dilatómetro a t°, el nivel del líquido llegará al trazo N_1, correspondiente a un volumen V_1 a cero grado.

Aparentemente la dilatación del líquido ha sido:

$$\Delta a = V_1 - V_0 \qquad [27]$$

Fig. 457. — Dilatómetro para líquidos.

Esta es la **dilatación aparente** del líquido.

Pero como el recipiente se ha dilatado, aumentando su capacidad, resulta que el volumen contenido a t° hasta el nivel N_1 es igual al que contenía a 0° hasta un nivel superior N_2, y cuyo valor es V_2.

La dilatación real o absoluta del líquido es entonces:

$$\Delta = V_2 - V_0 \qquad [28]$$

La dilatación del recipiente es: $\Delta_r = V_2 - V_1$ [29]

Sumando [27] y [29] resulta la fórmula [28], luego, de acuerdo a lo que antecede, podemos establecer, que la dilatación real del líquido es igual a la suma de la dilatación aparente con la dilatación del recipiente.

$$\Delta = V_2 - V_0 = \Delta_a + \Delta_r$$

La dilatación del recipiente no es de fácil determinación; por ello se recurre a un método indirecto. Se halla previamente la dilatación absoluta del mercurio, y luego, en base a las dilataciones aparentes de este líquido, se calculan las del dilatómetro en que está colocado, para distintas temperaturas.

Una vez hecha esa determinación es posible hallar las dilataciones reales o absolutas de cualquier otro líquido, usando el mismo aparato.

Cabe destacar que el recipiente hueco se dilata como si fuera macizo.

230. — **Coeficientes de dilatación.** — Establecido el significado de las dilataciones aparente y absoluta, vamos a definir los correspondientes coeficientes de dilatación.

Sea V_0 el volumen del líquido a 0°; V_{at} el volumen aparente a t°, y V_t el volumen real a t°.

Llamaremos: *coeficiente medio de dilatación aparente*, al aumento medio de volumen aparente por unidad de volumen inicial y por cada grado de aumento de temperatura.

$$\gamma_a = \frac{V_{at} - V_0}{V_0\, t} \qquad [30]$$

El *coeficiente medio de dilatación absoluta* se define como en el caso de los sólidos: es el aumento medio de volumen por unidad de volumen inicial y por grado de aumento de temperatura.

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0\, t} \qquad [31]$$

De la fórmula [30] deducimos el volumen aparente a t°:

$$V_{at} = V_0\,(1 + \gamma_a t) \qquad [32]$$

El volumen real es:

$$V_t = V_o (1 + \gamma t) \qquad [33]$$

Este volumen coincide con el volumen real a t° de la parte del dilatómetro ocupada a t°, o sea V_{at}; siendo γ_r el coeficiente de dilatación cúbica del recipiente:

$$V_t = V_{at} (1 + \gamma_r t) \qquad [34]$$

Si en [34] reemplazamos el valor V_{at} de [32]

$$V_t = V_o (1 + \gamma_a t) (1 + \gamma_r t)$$

e igualando con [33]:

$$V_o (1 + \gamma t) = V_o (1 + \gamma_a t) (1 + \gamma_r t)$$

de donde:

$$1 + \gamma t = 1 + \gamma_a t + \gamma_r t + \gamma_a \gamma_r t^2$$

restando 1 y dividiendo por *t*

$$\gamma = \gamma_a + \gamma_r + \gamma_a \gamma_r t$$

Pero el último término es muy pequeño comparado con los demás, y puede despreciarse, resultando, finalmente:

$$\gamma = \gamma_a + \gamma_r \qquad [35]$$

Fórmula que nos dice: que el coeficiente de dilatación absoluta es igual a la suma de los coeficientes de dilatación aparente y del recipiente.

§ 231.—**Dilatación absoluta del mercurio.** — La figura 458 b muestra el aparato empleado por Dulong y Petit para medir la dilatación absoluta del mercurio.

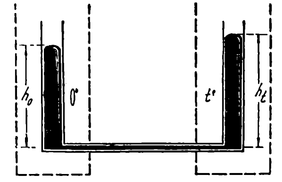


Fig. 458 a.—*Esquema del aparato de Dulong y Petit.*

Dos vasos con mercurio a temperatura 0° y t° respectivamente se comunican por un tubo inferior de pequeño diámetro. (Ver fig. 458 a).

Midiendo las alturas h_0 y h_t de las columnas de mercurio se tiene, de acuerdo a la reconocida propiedad de los vasos comunicantes (§ 113).

$$\frac{h_t}{h_0} = \frac{\delta_0}{\delta_t}$$

Llamando γ al coeficiente medio de dilatación cúbica del mercurio, y teniendo en cuenta la fórmula [24], podemos escribir

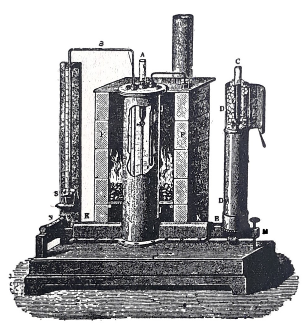


Fig. 458 b.

Fig. 458 b.—*Aparato de Dulong y Petit para la medida del coeficiente de dilatación cúbica del mercurio.*

$$\frac{h_t}{h_0} = \frac{\delta_t\ (1 + \gamma t)}{\delta_t} = 1 + \gamma t \qquad [36]$$

El valor del coeficiente se despeja resultando:

$$\gamma = \frac{h_t - h_0}{h_0 \cdot t} \qquad [37]$$

En rigor, medidas precisas han hecho ver que es más correcto expresar la dilatación del mercurio por la siguiente fórmula:

$$\Delta_t = \frac{V_t - V_0}{V_0} = 0{,}000181\ t + 0{,}000000012\ t^2 \qquad [38]$$

Los valores medios del coeficiente de dilatación absoluta del mercurio, calculados de acuerdo a la fórmula [38] resultan:

$$\text{entre } 0^\circ \text{ y } 50^\circ \qquad \gamma = 0{,}0001810 = \frac{1}{5525}$$

$$\text{,, } 0^\circ \text{ y } 100^\circ \qquad \gamma = 0{,}0001815 = \frac{1}{5510}$$

$$\text{,, } 0^\circ \text{ y } 300^\circ \qquad \gamma = 0{,}0001866 = \frac{1}{5360}$$

§ 232. — **Dilatación del agua.** — El agua presenta una particularidad en su dilatación: a los 4° centigrados de tempera-

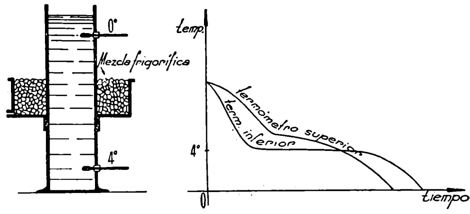


Fig. 459 b.

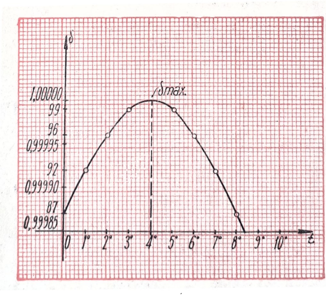


Fig. 459 a.

Fig. 459 a.—Aparato para estudiar la variación de densidad del agua con la temperatura.

Fig. 459 b.—Curvas que representan la marcha de las indicaciones de los termómetros.

Fig. 459 c. — Representación gráfica de la variación de densidad del agua con la temperatura.

tura adquiere su máxima densidad, y, por lo tanto, su volumen mínimo.

Calentando a partir de cero grados una masa de agua, primero se contrae, disminuyendo de volumen hasta llegar a los 4°; desde esta temperatura en adelante sigue aumentando su volumen, como todos los líquidos.

Se puede poner en evidencia esta anomalía con la conocida experiencia de Hope (fig. 459 a).

El agua de la probeta es enfriada con una mezcla de refrigerante colocada exteriormente; se observa que el termómetro de la parte inferior baja hasta 4° y permanece sin variar.

El termómetro de arriba al principio tiene temperaturas superiores al anterior, pero luego desciende, pudiendo llegar a 0°.

Esta experiencia prueba que la densidad del agua es máxima a 4°, quedando por ello en la parte de abajo del vaso.

El volumen específico o volumen de cada unidad de masa del agua, tiene, a 4° centigrados, su valor mínimo. Se define por el cociente:

$$\omega = \frac{V}{M} \qquad [39]$$

A continuación incluímos algunos valores del volumen específico y de la densidad del agua, referida a 4°; gráficamente se ven las variaciones de δ en la figura 459 c.

TABLA XIV

Temperatura	Densidad	Volumen específico
t	δ	ω
Grados centígrados	$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{cm^3}{g}$
0°	0,9998676	1,0001324
1°	0,9999266	1,0000734
2°	0,9999680	1,0000320
3°	0,9999992	1,0000078
4°	1,0000000	1,0000000
5°	0,9999918	1,0000082
6°	0,9999680	1,0000320
10°	0,9997271	1,0002730
20°	0,9982303	1,0017728
30°	0,9959708	1,0043456
40°	0,9922412	1,0078194

§ 233.—**Coeficiente medio y coeficiente de dilatación verdadero a t°.** —Tanto para sólidos como para líquidos, hemos definido hasta ahora los coeficientes medios de dilatación, expresando el volumen a $t°$ con la fórmula:

$$V_t = V_o\ (1 + \gamma t)$$

y el coeficiente medio:

$$|\gamma|_o^t = \frac{V_t - V_o}{V_o \cdot t} \qquad [40]$$

En rigor, la expresión del volumen a $t°$ adopta en general la forma:

$$V_t = V_o\ (1 + at + bt^2 + ct^3)$$

y aplicando la definición [40] el coeficiente medio resulta:

$$|\gamma|_o^t = a + bt + ct^2$$

Si en cambio, queremos el coeficiente de dilatación verdadero a $t°$, debemos dar un pequeño incremento de temperatura Δt a $t°$, y medir el correspondiente aumento de volumen ΔV, calculando el coeficiente con la fórmula:

$$\gamma = \frac{1}{V_o} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Se demuestra con otros recursos matemáticos, que este coeficiente de dilatación a $t°$ está dado por la fórmula:

$$\gamma = a + 2bt + 3.ct^2$$

Para interpretar estos valores nos referiremos a la figura 460, que es una representación gráfica de las dilataciones absolutas referidas al volumen V_o y tomadas a la presión atmosférica ordinaria.

Las ordenadas representan los valores de las dilataciones:

$$\frac{V_t - V_o}{V_o} = at + bt^2 + ct^3 \qquad [41]$$

y las abscisas las temperaturas t.

El coeficiente medio entre 0° y 20° es:

$$|\gamma|_o^{20} = \frac{MN}{ON} = tg\ MON$$

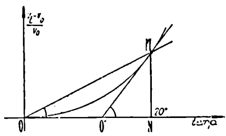


Fig. 460.—*Dilatación cúbica. Coeficiente medio y coeficiente a la temperatura t.*

estando representado por la tangente trigonométrica del ángulo que forma la cuerda OM con el eje Ot.

El coeficiente verdadero a 20°, por ejemplo, está dado por la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica en *M* con el eje *Ot*.

$$\gamma_{20} = \frac{MN}{O'N} = \left(\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} \right)_{20^\circ} = tg\ MO'N$$

En algunos casos se dan los tres coeficientes *a*, *b* y *c*, de la fórmula [41] en otros es suficiente dar dos *a* y *b*. Además, en el caso de los sólidos se aplican los mismos conceptos al coeficiente de dilatación lineal.

Veamos algunos valores:

TABLA XV

DILATACIÓN LINEAL DE SÓLIDOS

Sustancia	a	b	λ_{20}
Plomo	0,00002726	0,0000000074	0,00002800
Cobre	1607	403	1623
Plata	1827	48	1486
Platino	887	13	892
Aluminio	2354	70	2382
Oro	1414	239	1366
Níquel	1248	74	1278

TABLA XVI

DILATACIÓN DE LÍQUIDOS

Cuerpo	Límites	a	b	c	γ_{20}
		10^{-5}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-5}
Acetona	0° a 54°	132,40	3809	— 880	147
Benceno	0° a 81°	117,63	1278	806	124
Hexano (normal)	0° a 66°	129,48	1747	1236	138
Tolueno	0° a 100°	102,80	1779		110
Alcohol metílico .	0° a 70°	118,56	1565	911	126
Alcohol amílico .	0° a 94°	97,02	1873	365	105
Acido acético	16° a 107°	106,30	— 126	1088	117
Anilina	0° a 140°	82,35	841	107	86
Xileno	0° a 141°	96,40	1025	328	101
Xileno	19° a 131°	97,01	871	528	101

Aplicación. — Se desea calcular el coeficiente medio de dilatación del benceno entre 0° y 30°.

$$132{,}40 \times 10^{-5} + 3809 \times 10^{-9} \times 30 + 806 \times 10^{-11} \times 30^2 = 0{,}001446$$

El coeficiente a 20° es:

$$\gamma_{20} = 0{,}00124$$

CAPÍTULO XIX

DILATACIÓN DE GASES - TEMPERATURA ABSOLUTA
ECUACIÓN DE ESTADO - TERMÓMETRO DE GAS

§ 234. — **Dilatación de los gases.** — Elevando la temperatura de una masa de gas, aumenta su volumen, si el recipiente que lo contiene se lo permite. Si este último es indeformable, el volumen de la masa gaseosa no cambia, pero su presión aumenta.

Presión, volumen y temperatura son tres parámetros que definen el estado de una masa de gas. Para llegar al establecimiento de la relación que los vincula (ecuación de estado), comenzaremos por estudiar los casos simples, en que uno de los parámetros queda invariable.

El caso de: t = *constante,* ya lo hemos estudiado en la *ley de Boyle-Mariotte.* Ahora veremos sucesivamente los casos correspondientes a variaciones de la temperatura t, a los que llamaremos *dilataciones.*

Si p = **constante,** variará el volumen, teniéndose una **dilatación a presión constante.**

Si V = **constante,** variará la presión, y el fenómeno será una **dilatación a volumen constante.**

§ 235. — **Dilatación a presión constante. - Coeficiente.** — Para realizar la dilatación de un gas a presión constante, puede emplearse el dispositivo indicado en esquema por la figura 461.

El gas a estudiar se coloca en el recipiente R que lleva un tubo horizontal en cuyo interior corre un índice de mercurio M.

El tubo está graduado y constituye un dilatómetro; la posición del índice M en la escala del tubo, da el volumen V del gas encerrado en el recipiente.

Fig. 461.—*Dilatación de un gas a presión constante.*

Colocando hielo en fusión en la caja ABCD, el termómetro marcará 0° y el índice se correrá hacia adentro deteniéndose en la lectura V_o.

Calentando la caja metálica ABCD se podrán determinar los distintos volúmenes que ocupa el gas encerrado en R a medida que cambia la temperatura del agua de fusión del hielo.

La presión del gas queda invariable e igual a la presión atmosférica (salvo cambios accidentales de ésta, que se aprecian, si los hay, con un barómetro).

Si al llegar a la temperatura t°, el volumen es V_t, el aumento de volumen ha sido:

$$V_t - V_o$$

Llamaremos coeficiente medio de dilatación del gas a presión constante entre 0° y t°, al valor:

$$\alpha = \frac{V_t - V_o}{V_o \cdot t} \qquad [1]$$

el cual representa el aumento medio de volumen que experimenta cada unidad de volumen del gas, por cada grado de elevación de temperatura, siempre que se mantenga constante la presión.

§ 236. — **Ley de Gay-Lussac.** — Gay-Lussac, operando con diferentes gases y con ayuda de un aparato análogo al indicado en la figura 461, dotado de un tubo exactamente calibrado, llegó a establecer la siguiente ley (1):

El coeficiente de dilatación de un gas entre 0° y t°, bajo presión constante, es indepndiente de la temperatura t, de la presión p y de la naturaleza del gas.

Para todos los gases, este coeficiente tendría el valor:

$$\alpha = \frac{1}{273} \simeq 0{,}003665$$

§ 237. — **Reducción de volúmenes.** — De acuerdo con la definición del coeficiente α dado por la fórmula [1], se tiene:

$$V_t = V_o + V_o \alpha t$$

(1) Se llama ley de Gay Lussac y también ley de Charles.

y, por tanto:

$$V_t = V_0\ (1 + \alpha t) \qquad [2]$$

Conocido el valor del coeficiente α, y, por tanto, el binomio $(1 + \alpha t)$, se puede pasar del volumen a 0° al correspondiente a la temperatura t°.

También se puede reducir a 0° el volumen V_t, en el caso de quedar invariable la presión. Basta con despejar V_0 en la fórmula [2]:

Ejemplo:

Supongamos: $t = 91°$; $V_t = 100$ cm³; p = constante. Siendo:

$$\alpha = \frac{1}{273}$$

$$V_0 = \frac{100}{1 + \frac{1}{273} \times 91} = \frac{100}{1 + \frac{1}{3}} = 75 \text{ cm}^3$$

§ 238. — **Dilatación a volumen constante.** — Elevando la temperatura de una masa de gas encerrada en un recipiente cuyo volumen no cambia, se constata que la presión aumenta. A este fenómeno se lo llama **dilatación a volumen constante.**

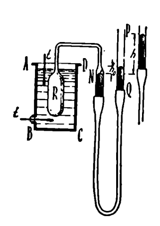


Fig. 462. — *Dilatación de gases a volumen constante.*

Para determinar la relación entre presiones y temperaturas, puede emplearse el dispositivo de la figura 462 .

El recipiente R, en el que se coloca el gas a estudiar, se comunica con un manómetro de aire libre que permite medir las presiones p que corresponden a cada temperatura.

Inicialmente se coloca hielo en la caja ABCD; los termómetros t marcan 0° y la presión toma un valor p_0, medido por la columna de mercurio h_0 sumada a la presión exterior H. (1).

Se marca con un enrase el nivel del mercurio en N, que limita el volumen del gas encerrado en R.

Al elevarse a t° la temperatura del agua de fusión, el gas aumenta su volumen y su presión, empujando el mercurio.

Para mantener constante el volumen, se levanta el tubo PQ hasta que el mercurio vuelva al enrase N.

El desnivel h dará la presión p_t del gas $p_t = (H + h)\ \rho$

(1) En rigor: $p_0 = (H + h_0)\ \rho$, siendo ρ el peso específico del Hg.

Al variar de 0° a t° la temperatura, se ha producido una variación de presión:

$$p_t - p_o = (h - h_o)\,\rho \qquad [3]$$

Se llama **coeficiente, medio de dilatación del gas a volumen constante, entre 0° y t°,** al valor:

$$\beta = \frac{p_t - p_o}{p_o t} \qquad [4]$$

que representa el aumento medio de presión del gas, por cada unidad de presión inicial y por cada grado de elevación de temperatura, entre 0° y t°.

De la fórmula se deduce:

$$p_t = p_o + \rho_o \beta t$$

y, por tanto:

$$p_t = p_o\,(1 + \beta t) \qquad [5]$$

§ 239. — **Gas ideal o perfecto.** — Es fácil constatar que, para un gas que cumple exactamente la ley de Boyle-Mariotte, los coeficientes de dilatación α y β son iguales.

En efecto, consideremos una masa de gas a 0° y presión p_o, ocupando un volumen V_o.

Calentemos a presión constante hasta la temperatura t; el volumen V_t será:

$$V_t = V_o\,(1 + \alpha t) \text{ ; y la presión: } p_o.$$

Repitamos la experiencia, pero calentando a volumen constante; a la temperatura *t* la presión será:

$$p_t = p_o\,(1 + \beta t) \text{ y el volumen } V_o.$$

Ambos estados finales corresponden a una misma temperatura *t*, y, por lo tanto, estarán vinculados por la ley de Boyle-Mariotte:

$$p_o V_t = p_t V_o$$

Sustituyendo los valores anteriores de V_t y p_t:

$$p_o V_o\,(1 + \alpha t) = V_o p_o\,(1 + \beta t) \qquad [6]$$

y simplificando:

$$1 + \alpha t = 1 + \beta t$$

de donde:

$$\alpha = \beta \qquad [7]$$

Y si el gas cumple también la ley de Gay-Lussac, se tiene:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273} = 0{,}003665 \qquad [8]$$

Como consecuencia de esto, resulta:

$$p_t = p_0 \; (1 + \alpha t) \qquad [9]$$

Los gases reales, ya hemos visto (§ 154) que no cumplen rigurosamente la ley de Boyle-Mariotte.

Mediciones precisas a que nos referiremos en el siguiente parágrafo, han demostrado que también la ley de Gay-Lussac debe considerarse como una ley límite que, en rigor, ningún gas cumple exactamente.

Se llama **gas ideal** o **gas perfecto** a un gas que cumple rigurosamente las leyes de Boyle-Mariotte y Gay-Lussac.

De los gases reales, los que más se acercan al cumplimiento de esas leyes son el hidrógeno y el helio.

§ 240.— **Experiencias de Regnault. Valores de α y β.** — Regnault estudió la dilatación de los gases a presión y a volumen constante empleando los dispositivos indicados en las figuras 463 y 464.

Los resultados obtenidos por Regnault, indican que cada gas tiene valores propios para los coeficientes α y β, los cuales son influenciados por la temperatura y por la presión.

A la presión de una atmósfera, los coeficientes medios entre 0° y 100° del nitrógeno, el hidrógeno, el CO^2 y el aire hallados por Regnault son:

	α	β
Nitrógeno	0,0036682	
Hidrógeno	0,0036678	0,0036613
Anhídrido carbónico	0,0036896	0,0037099
Aire	0,0036653	·0,0036706

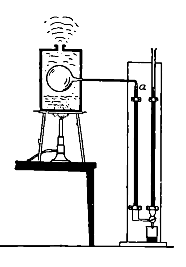


Fig. 463.—*Dilatación a volumen constante. A medida que aumenta la temperatura se vierte mercurio por la rama abierta del manómetro para mantener constante el volumen (nivel constante a).*

Fig. 464.—*Dilatación a presión constante. Al dilatarse el gas, se saca el mercurio del manómetro hasta igualar el nivel en ambas ramas (presión constante, igual a la exterior).*

Determinaciones precisas de Chapuis, Travers, Kamerlingh Onnes y otros han permitido establecer que para el hidrógeno, el coeficiente medio entre 0° y 100°, para $p_0 = 1$ atmósfera es:

$$\beta = 0{,}0036626 = \frac{1}{273{,}03}$$

y para el helio en las mismas condiciones:

$$\beta = 0{,}0036627$$

Estos valores son prácticamente iguales a $\frac{1}{273} = 0{,}03665$, valor previsto por las leyes de Gay-Lussac y Boyle-Mariotte.

Regnault comprobó la influencia de la presión y la temperatura en los valores α y β; así para el anhídrido carbónico encontró:

Variación del valor de β para el anhídrido carbónico

$p_0 = 76$ cm	$\beta = 0{,}0037099$	(entre 0° y 100°)
$p_0 = 252$ cm	$\beta = 0{,}0038450$	(entre 0° y 100°)
$p_0 = 76$ cm	$\beta = 0{,}0037040$	(entre 0° y 200°)

Para presiones elevadas, las determinaciones de Amagat y Andrews han demostrado que la ley de Gay-Lussac no es válida ni en primera aproximación, salvo para el hidrógeno, cuyo coeficiente $|\ \beta\ |_0^{100}$ llega a un máximo de 0,00383 para $p = 200$ atmósferas y después vuelve hacia $\frac{1}{273}$

§ 241.— **Temperatura absoluta.** — Si en la expresión:

$$V_t = V_0\ (1 + \alpha t)$$

ponemos $\alpha = \dfrac{1}{273}$ y damos a la temperatura el valor

$t = -\ 273°$, resulta:

$$V_{(-273)} = V_0 \left[1 + \frac{1}{273} \times (-\ 273)\right] = V_0\left(1 - \frac{273}{273}\right) = 0 \qquad [9]$$

De modo que si admitimos que un gas sigue cumpliendo la ley de Gay-Lussac, hasta la temperatura de $t = -\ 273°$, su volumen debe reducirse a 0, cualquiera que sea su valor inicial V_0.

Análogamente, la fórmula:

$$p_t = p_0\ (1 + \alpha t)$$

nos daría para $t = -\ 273°$, $p_{-273} = 0$ [10]

A la temperatura de — 273° centigrados, un gas ideal tendría volumen y presión iguales a cero. Dicha temperatura constituye el **cero absoluto.**

Las temperaturas determinadas a partir de este cero se llaman **temperaturas absolutas.**

De acuerdo con esta definición, entre la temperatura absoluta T y la centigrada t, existe la siguiente relación:

$$T = 273° + t \qquad [11]$$

Ejemplo:

El valor de la temperatura $t = 37°$ centígrados, equivale a la temperatura absoluta:

$$T = 273° + 37° = 310°$$

Esta es la temperatura absoluta del cuerpo humano en condiciones normales.

§ 242.—**Transformaciones y ecuación del estado de los gases ideales.** — Hemos dicho que un gas ideal o perfecto es un flúido que se supone cumple rigurosamente las leyes de Boyle-Mariotte y Gay-Lussac.

En los gases ideales las transformaciones *isotérmicas* (t = constante) están regidas por la ley de Boyle-Mariotte:

$$pv = \text{constante.}$$

Las transformaciones *isobáricas* (p = constante) están regidas por la ley de Gay-Lussac:

$$V_t = V_0 \ (1 + \alpha t)$$

y las transformaciones *isocoras* (v = constante) son regidas por la ley:

$$p_t = p_0 \ (1 + \alpha t)$$

consecuencia de lo anterior, según se ha visto (§ 238).

Una transformación que lleve el gas perfecto de un estado p_o, v_o, t_o, a otro p, v, t, está regida por una fórmula llamada **ecuación de estado de los gases ideales**, la que se deduce de las leyes de Boyle-Mariotte y de Gay-Lussac.

Consideremos una masa de gas a temperatura $t_o = 0°$, presión p_o y volumen V_o y hagámosla calentar hasta t°, manteniendo constante la presión p_o.

El gas se dilatará, adquiriendo un volumen:

$$V_t = V_0 \ (1 + \alpha t) \qquad [12]$$

Si después de esto aumentamos la presión hasta llegar al valor p, sin cambiar la temperatura, el volumen tomará un valor V.

Como esta última evolución es a temperatura constante, valdrá la ley de Boyle-Mariotte:

$$pV = p_o V_t \qquad [13]$$

y sustituyendo el valor de v_t dado por la [12], resulta:

$$pV = p_o V_o (1 + \alpha t) \qquad [14]$$

Esta es la *ecuación de estado* buscada, la que vincula los parámetros p, V y t de que depende el estado de una masa de gas.

A fin de hacer más gráfico el método para deducirla, agregamos el cuadro que sigue:

	Presión	Volumen	Temp.		
Estado I	p_o	V_o	0°	Gay Lussac $V_t = V_o (1 + \alpha t)$	$pV = p_o V_o (1 + \alpha t)$
„ II	p_o	V_t	t°		
„ III	p	V	t°	Boyle-Mariotte $pV = p_o V_t$	

§ 243.— **Reducción de volúmenes.** — La ecuación de estado permite realizar reducciones de volúmenes a distintas presiones y temperaturas.

Ejemplo:

Una masa de gas a la temperatura t = 80° y presión p = 1300 mm de mercurio tiene un volumen V = 500 cm³. Calcular su volumen en las condiciones normales (p_o = 760 mm Hg, t_o = 0°).

La ecuación de estado de los gases [14] nos permite escribir:

$$p_o V_o = \frac{pV}{1 + \alpha t}$$

de donde:

$$V_o = \frac{p}{p_o} \frac{V}{1 + \alpha t} \qquad [15]$$

El valor buscado es:

$$V_o = \frac{1300}{760} \frac{500}{1 + \frac{80}{273}} = 661{,}435 \text{ cm}^3$$

§ 244.—**Otras formas de la ecuación de estado.**— 1. Si en la ecuación:

$$p\,V = p_o\,V_o\,(1 + \alpha\,t)$$

Sacamos α fuera del paréntesis; resulta:

$$p\,V = p_0 V_0\,\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) \qquad [16]$$

pero:

$$\frac{1}{\alpha} + t = \frac{1}{\frac{1}{273}} + t = 273 + t = T \ (\S\ 241)$$

y por tanto se tiene:

$$p\,V = p_0 V_0\,\alpha \, . \, T \qquad [17]$$

de la que se deducen:

$$V = \frac{p_0}{p} \, . \, V_0\,\alpha\,T$$

$$V_0 = \frac{p}{p_0}\,\frac{V}{\alpha\,T}$$

2.—El producto $p_0 V_0\,\alpha$ es un valor constante, al que se puede poner en función de la masa m del gas o del número n de moléculas gramos o moles que contiene la masa m.

En efecto, teniendo en cuenta que la densidad del gas a 0º es:

$$\delta = \frac{m}{V_0}$$

resulta:

$$V_0 = \frac{m}{\delta_0}$$

luego:

$$p_0 V_0\,\alpha = m\,\frac{p_0\,\alpha}{\delta_0} = m \, . \, C$$

y la ecuación de estado toma la forma

$$p\,V = m\,C\,T \qquad [18]$$

donde m es la masa, C una constante propia del gas: $\frac{p_0\,\alpha}{\delta_0}$, y T la temperatura absoluta.

3.—*Forma más general.*—Es sabido que el peso molecular es un número que representa aproximadamente la relación entre la masa de

la molécula del cuerpo y la de un átomo de hidrógeno (más rigurosamente se compara con 1/16 de la masa del átomo de oxígeno 16).

Dicho número establecido en base a la hipótesis de Avogadro (volúmenes iguales de gas en las mismas condiciones de temperatura y presión tienen igual número de moléculas), da origen al concepto de *mol* o *molécula gramo.*

Esta, es simplemente un número de gramos-masa igual al peso molecular de la sustancia.

Así siendo 32 el peso molecular del oxígeno, un *mol* de oxígeno son 32 gramos de oxígeno.

Siendo M el peso molecular de un gas, en m gramos hay:

$$n = \frac{m}{M} \text{ molécula gramo} \qquad [19]$$

Por tanto la masa m es:

$$m = n\,M$$

Reemplazando este valor en la fórmula [18], resulta

$$p\,V = n \,.\, M\,C\,T \qquad [20]$$

ó

$$p\,V = n\,R\,T \qquad [21]$$

donde $R = MC$ es una constante universal para todos los gases, cuyo valor es:

$$R = 0{,}08209 \text{ litro-atmósfera } (1)$$

$$R = 8{,}3136 \times 10^{7} \; erg$$

La fórmula [21] es la *ecuación más general de los gases ideales.*

(1) Para el oxígeno: $M = 32\ g$; $Vo = 22{,}412$ litros y $\delta o = \dfrac{32\ g}{22{,}412 \text{ litros}}$

luego: R: $MC = M \dfrac{Po\alpha}{\delta o} = 32\ g \dfrac{1 \text{ at. } 1/273}{32g/22{,}412 \text{ lt}} =$

$= \dfrac{1 \text{ atm. x } 22{,}412 \text{ litro}}{273} = 0.08209$ litro-atmósfera

§ 245.—**Densidad de los gases.** — 1. *Relación entre densidades absolutas.* Siendo m la masa de un gas y V_0, su volumen a 0°, la densidad a dicha temperatura es:

$$\delta_0 = \frac{m}{V_0}$$

En otro estado a presión p, volumen V y temperatura t su densidad será, de acuerdo a la fórmula [16]:

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{p_0}{p} V_0 (1 + \alpha t)} = \frac{m}{V_0} \frac{p}{p_0 (1 + \alpha t)}$$

$$\delta = \delta_0 \frac{p}{p_0 (1 + \alpha t)} = \frac{\delta_0 p}{p_0 \alpha T} \qquad [22]$$

2.—*Relación entre densidades relativas.* — Llamando δ_0 y δ las den sidades de un gas en las condiciones antedichas y siendo δ'_0 y δ' las de un segundo gas tomando como término de comparación, se tiene como valor de la densidad relativa:

$$D = \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\delta_0 \frac{p}{p_0 (1 + \alpha t)}}{\delta_0' \frac{p}{p_0 (1 + \alpha t)}} = \frac{\delta_0}{\delta_0'} \qquad [23]$$

Por tanto, el cociente de las densidades de dos gases ideales en las mismas condiciones de presión y de temperatura, es una constante que se llama **densidad relativa: D**, del primero respecto al segundo.

Esta densidad relativa D se puede determinar como relación de las masas o pesos de volúmenes iguales de los dos gases en igualdad de condiciones de presión y temperatura:

$$D = \frac{\delta}{\delta'} = \frac{m}{m'} = \frac{P}{P'}$$

Generalmente se toma como término de comparación el aire, cuya densidad a 0° y 760 mm de Hg es:

$$\delta'_0 = 0{,}001293 \frac{g}{cm^3}$$

Conocida la densidad relativa al aire, se puede calcular la absoluta a cero grado multiplicándola por δ'_0:

$$D = \frac{\delta}{\delta'_0} \therefore \delta_0 = D \cdot \delta'_0 \qquad [24]$$

Aplicación.—Calcular la masa de un volumen $V = 200$ cm³ de hidrógeno a la temperatura $t = 80°$ y presión $p = 2.000$ mm de mercurio.

Sabiendo que la densidad del hidrógeno con relación al aire es: $D = 0{,}06948$, se tiene:

$$\delta_0 = D\ \delta_0' = 0{,}06948 \times 0{,}001293 = 0{,}000089837 \frac{g}{cm^3}$$

El volumen reducido a 0° y 760 mm es:

$$V_0 = \frac{p}{p_0} \frac{V}{1 + \alpha t} = \frac{2000}{760} \cdot \frac{200}{1 + \frac{80}{273}} = 407{,}05 \text{ cm}^3$$

La masa buscada es:

$$m = V_0\ \delta_0 = 0{,}03656\ g$$

TABLA XVII

DENSIDAD DE GASES RELATIVA AL AIRE

Argón	1,3796
Cloro	2,486
Helio	0,138
Hidrógeno	0,06948
Nitrógeno	0,9672
Oxígeno	1,1053
CO^2	1,5290

La determinación de estas densidades se hace pesando sucesivamente un balón de experiencia lleno del gas dado primero y lleno de aire en iguales condiciones de temperatura y presión después.

Conociendo el peso del balón vacío, por diferencia se sacan las masas *m* y *m'* cuya relación es D.

El problema se complica por efecto de las variaciones de p y de V en el balón de experiencia y aún por la variación del empuje del aire.

Para compensar este efecto se toman siempre dos balones A y B de volúmenes exteriores iguales, usándose uno de ellos como tara; las variaciones de empuje resultan así ejercidas sobre los dos platillos (fig. 465).

Para determinaciones exactas de densidades relativas se emplean el método de Dumas y el de Víctor Mayer, en los que se aplica la ecuación de estado de los gases ideales.

La densidad absoluta (masa específica) puede hallarse equilibrando el balón A lleno del gas a la presión normal y determinando luego el peso del gas extraído al hacer el vacío, disminuyendo su presión al valor p obtenido con la máquina neumática empleada.

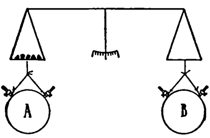


Fig. 465.—*Determinación de la densidad de un gas.*

Conocido el volumen del balón (se lo pesa vacío y lleno de agua, para esto) y aplicando la ecuación de estado pueden calcularse δ y δ_0.

§ 246. — **Termómetro de gas: escala.** — El termómetro de gas es un dispositivo semejante al que indicamos para definir el coeficiente β de dilatación a volumen constante (fig. 462).

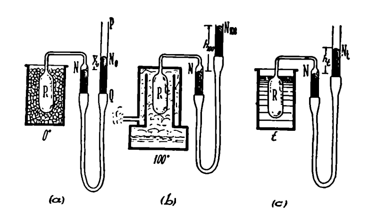


Fig. 466.—*Termómetro de gas. Determinación de la constante y de una temperatura.*

El índice de estado térmico empleado en él es la variación de la presión de un gas mantenido a volumen constante. La fig. 466 muestra tres esquemas del aparato y la 467 representa un modelo de termómetro de aire de Jolly.

1. — *Graduación.*—Colocado el recipiente en hielo fundente (fig. 466 a) y mantenido el nivel del mercurio en el enrase N, se mide el desnivel h_0 entre N y N_0, correspondiente a 0°.

Llevado el recipiente R a la temperatura del vapor de agua en ebullición a la presión normal (100°), se levanta la rama móvil PQ del manómetro, obligando al gas a conservar el volumen inicial.

El desnivel entre el enrase N y el nivel N_{100} en la otra rama es h_{100} (fig. 466 b).

Al pasar la temperatura de 0° a 100° centígrados la presión aumentó de: $h_{100} - h_0$.

Para este termómetro el grado centígrafo es la variación de temperatura que produce un aumento de presión igual a la centésima parte de la que se produce al pasar del hielo fundente al vapor de agua a 100°.

A un grado centígrado corresponde la variación de presión (en altura de mercurio):

$$\frac{h_{100} - h_0}{100} \qquad [25]$$

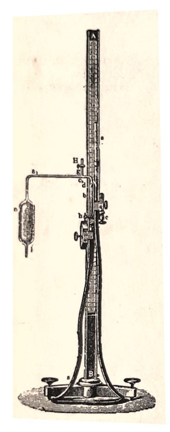


Fig. 467.—*Termómetro del aire de Jolly.*

2.—*Determinación de una temperatura.* — Colocado el recipiente R en un medio cuya temperatura se desea conocer (figura 466 c), para mantener el volumen constante habrá que mantener un desnivel (levantando el tubo móvil PQ), igual a h_t.

De acuerdo a la proporcionalidad establecida en la definición que antecede, podemos escribir, llamando t a la temperatura buscada:

$$\frac{h_t - h_0}{t} = \frac{h_{100} - h_0}{100} \qquad [26]$$

De donde:

$$t = 100\,\frac{h_t - h_0}{h_{100} - h_0} \qquad [27]$$

§ 247.—**Termómetro de hidrógeno. Escala normal.** — Para determinaciones precisas se emplea el termómetro de hidrógeno, que tiene la ventaja de la constancia de su coeficiente de dilatación, que es igual al del gas perfecto o ideal.

Este termómetro puede servir para temperaturas desde —200° a + 1200° usando un recipiente de porcelana.

Además, siendo su dilatación unas 200 veces mayor que la del recipiente, se reduce al mínimo la influencia de éste, en los errores de observación.

La escala termométrica normal, fijada por el Comité Internacional de pesas y medidas en 1887, está basada en la dilatación, a volumen constante, de una masa invariable de hidrógeno.

En ella se parte, para 0°, de la presión inicial p_0 equilibrada por una columna h_0 de mercurio de 1 metro de altura normal (altura a 0_0 y donde $g_n = 980{,}665$ cm/seg²).

El grado centígrado de esta escala normal, es la diferencia de temperatura que produce una variación de presión del hidrógeno, igual a la centésima parte de la sufrida entre los puntos fundamentales.

Teniendo en cuenta que para el hidrógeno

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273{,}03} = 0{,}0036626$$

podemos dar forma particular a la expresión de la temperatura de la fórmula [27].

De acuerdo con ésta:

$$t = \frac{100}{h_{100} - h_0} (h_t - h_0)$$

($h_0 = 100$ cm. de altura normal)
pero por la definición del coeficiente de dilatación, $\beta = \alpha$:

$$\alpha = \frac{h_{100} - h_0}{h_0 \times 100}$$

de donde:

$$\frac{100}{h_{100} - h_0} = \frac{1}{\alpha \cdot h_0}$$

y sustituyendo en el valor de t, se tiene:

$$t = \frac{h_t - h_0}{\alpha \cdot h_0} = \frac{1}{\alpha} \; \frac{h_t - h_0}{h_0} \qquad [28]$$

y, finalmente:

$$t = 273{,}03 \; \frac{h_t - h_0}{h_0} \qquad [29]$$

Reducción a la temperatura normal.—Las indicaciones dadas por los termómetros a mercurio o a otros líquidos deben reducirse a las de la escala normal.

Como cada líquido tiene sus coeficientes de dilatación, y otro tanto sucede con los recipientes de vidrio en que están contenidos, la reducción debe hacerse teniendo en cuenta ambos factores de corrección.

Los manuales tienen fórmulas y tablas para termómetros de mercurio, alcohol, tolueno y pentano, que son los líquidos termométricos más usados.

Siendo t la temperatura centígrada leída en el termómetro a líquido, t_H la correspondiente en la escala normal de hidrógeno, se tiene:

$$t_H = t + C \qquad [30]$$

Algunos valores de la corrección están dados en la tabla que sigue; en la que, para alcohol, toluol y pentano figuran directamente los valores de t_h.

TABLA XVIII

REDUCCIÓN DE TEMPERATURAS

Valores de C

	LIQUIDOS				
	MERCURIO				
t	Vidrio de Jena	Vidrio duro francés	Alcohol	Toluol	Pentano
— 75°	——	——	— 67,40°	— 60,46°	— 75,32°
— 30°	+ 0,180	+ 0,290	— 27,72°	— 25,10°	— 31,56°
— 20°	+ 0,100	+ 0,172	— 18,66	— 16,90	— 21,27°
— 10°	+ 0,040	+ 0,073	— 9,43	— 8,54	— 10,77
0°	0	0	0	0	0
10°	— 0,024	— 0,052			
20°	— 0,035	— 0,085			
30°	— 0,038	— 0,102			
40°	— 0,034	— 0,107			
50°	— 0,026	— 0,103			
60°	— 0,16°	— 0,090°			
70°	— 0,008	— 0,072			
80°	— 0,001	— 0,050			
90°	+ 0,002	— 0,026			
100°	0,000	0,000			
200°	— 0,63	— 0,125			
300°	— 4,40°				
400°	— 11,50°				
500°	— 23,00°				
600°	— 41,10°				

Entre 0° y 100° el termómetro de mercurio con vidrio de Jena se aleja poco de la escala normal.

NOTA. — *Además de la escala normal*, se usa otra llamada *termodinámica*, cuyas temperaturas difieren muy poco de los valores Th = 273 + th.

CAPÍTULO XX

CALORIMETRÍA

§ 248. — **Cantidad de calor. - Calor específico.** — Cuando queremos *elevar* la temperatura de un cuerpo cualquiera, lo ponemos en contacto o en las proximidades de otro cuerpo cuya temperatura sea mayor.

Solemos emplear cuerpos en que la temperatura no varía mayormente, aunque los utilicemos para elevar la de muchos otros. Por ejemplo, el carbón encendido de una hornalla o el gas en combustión que sale de un mechero.

A éstos los llamamos *fuentes caloríficas.*

Observamos que, en contacto con la misma fuente y en las mismas condiciones, distintos cuerpos o distintas masas de una misma sustancia tardan diferentes tiempos en experimentar el mismo aumento de temperatura. Decimos entonces, que los cuerpos que se calientan *reciben calor* de la fuente más caliente [1].

Cuando colocamos al cuerpo en contacto con otro más frío y disminuye de temperatura, diremos que *cede calor.*

Realicemos la experiencia tomando un cuerpo cualquiera y colocándolo en un recipiente aislado térmicamente del exterior, en contacto con hielo sin agua, a 0° C. Si su temperatura es mayor que 0°, observaremos que el cuerpo se enfría hasta alcanzar el estado térmico del hielo, y, además, una parte del hielo se funde.

Repitiendo la misma experiencia con el mismo cuerpo a igual temperatura inicial, comprobaremos que funde siempre la misma cantidad de hielo.

Si luego colocamos dos cuerpos iguales a la misma temperatura inicial, la cantidad de hielo fundido será doble de la que se fundía con uno solo.

Comprobaremos así, que estamos en condiciones de definir la igualdad y la suma de las cantidades de calor, en base a la medida de la cantidad de hielo fundido en cada caso.

(1) Podría decirse que el cuerpo más frío cede *frío* a la fuente, la teoría tendría igual validez.

Concluímos, pues, que la *cantidad de calor es una magnitud.*

Tomando cuerpos de la misma sustancia, pero de distinta masa, a igual temperatura inicial, observamos que las cantidades de hielo fundido (o sea las cantidades de calor cedido) son proporcionales a las masas.

Una misma masa, a diversas temperaturas iniciales, funde cantidades de hielo proporcionales a las temperaturas iniciales.

Enunciamos la siguiente ley: la cantidad de calor que cede un cuerpo al enfriarse, desde t° hasta 0°, es proporcional a la masa del cuerpo y la temperatura incial t°.

$$Q = c \,.\, m \,.\, t$$

El factor de proporcionalidad c se llama **calor específico medio** entre cero y t°, y es aproximadamente constante para cada sustancia.

En virtud de esa definición, si el cuerpo de masa m pasa de la temperatura t_1 a la temperatura t_2, ganará una cantidad de calor:

$$Q = cmt_2 - cmt_1$$

es decir:

$$Q = c \,.\, m \,.\, (t_2 - t_1) \qquad [2]$$

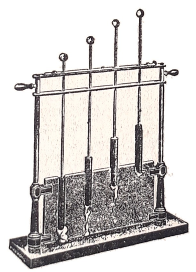


Fig. 468.—*Comprobación de que la capacidad calorífica depende de la sustancia.*

Luego, la cantidad de calor que recibe un cuerpo de calor específico c, cuando su temperatura pasa de t_1 a t_2, es proporcional a la masa y al aumento de la temperatura; el factor de proporcionalidad es el calor específico de la sustancia.

Una comprobación cualitativa de que la cantidad de calor depende de la sustancia, a igualdad de las demás condiciones, se realiza con el aparato de la figura 468, con el cual se comprueba que varios cilindros metálicos de distintas sustancias a la misma temperatura inicial, funden cantidades diferentes de un bloque de cera.

§ 249.— **Calor específico - Caloría - Capacidad calorífica.** — De la fórmula [2] del párrafo anterior deducimos:

$$c = \frac{Q}{m\,(t_2 - t_1)} \qquad [3]$$

que nos dice que: el calor específico medio entre t_1 y t_2 grados, es la cantidad media de calor necesario para elevar en un grado la temperatura de la unidad de masa de sustancia.

Tomaremos como unidad para medir cantidades de calor la **pequeña caloría media** (*cal*), que es el calor específico medio del agua entre cero y cien grados, o sea, es la centésima parte de la cantidad de calor necesario para calentar un gramo de agua entre cero y cien grados centígrados.

Si en lugar de un gramo tomamos un kilogramo, tendremos la **gran caloría media** (*Cal*), que es entonces igual a 1 000 *pequeña caloría media.*

Siendo la temperatura un número, el calor específico quedará expresado en:

$$[c] = \frac{cal}{g} \qquad [4]$$

$$[c] = \frac{Cal}{Kg} \qquad [5]$$

La cantidad de calor necesario para elevar en un grado la temperatura de la unidad de masa de una sustancia a una temperatura dada, se llama *calor específico a esa temperatura.* Así, por ejemplo, el calor específico a 15° C es la cantidad de calor necesario para calentar 1 g de sustancia desde 14 ½° C a 15 ½° C. Como unidades para medir cantidades de calor, suele tomarse la caloría a 0° y la caloría a 15°, cuyas relaciones con la caloría media son las siguientes:

$$c_{15} = 0.9976\ c_m \text{ (Caloría de Bunsen)} \qquad [6]$$

$$c_0 = 1.0056\ c_m \text{ (Caloría de Regnault)} \qquad [7]$$

En general, la caloría a 15° se llama *caloría normal.* Las relaciones halladas entre las diversas calorías varían con los autores, como puede verse en la tabla XIX.

TABLA XIX

CALORES ESPECIFICOS DEL AGUA

	Rowland	Day	Pernet
5°	1,0056	1,0054	1,0042
10°	1,0026	1,0019	1,0019
15°	1,0000	1,0000	1,0000
20°	0,9977	0,9979	0,9983
25°	0,9963	0,9972	0,9972
30°	0,9958	0,9969	0,9967
35°	0,9963	0,9981	0,9969
Es mínimo a la temperatura:	29°	28°	32°

Los calores específicos de casi todos los sólidos y líquidos son menores que la unidad. Veamos algunos valores:

TABLA XX

CALORES ESPECIFICOS

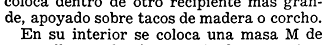
Sustancia	c_m entre 0° y 100°
Acero	0,115
Aluminio	0,220
Cobre	0,094
Mercurio	0,033
Plata	0,056
Plomo	0,031
Cinc	0,094
Hielo	0,50
Vidrio	0,20
Aceite de oliva	0,40
Acido sulfúrico	0,33
Alcohol	0,58
Amoníaco	1,00
Eter	0,54
Petróleo	0,50

Se llama **capacidad calorífica** de un cuerpo de masa M y calor específico c, al producto Mc. Es la cantidad de calor necesario para elevar en un grado la temperatura del cuerpo.

§ 250. — **Medición de cantidades de calor - Calorímetros de mezclas.** — Los aparatos destinados a la medida de cantidades de calor se llaman calorímetros. Distinguiremos fundamentalmente de dos tipos: de mezclas y de hielo.

El calorímetro de las mezclas está formado por un recipiente de latón, aislado térmicamente del exterior, de la mejor manera posible (fig. 469).

Para ello se pule brillante su superficie exterior, y se lo coloca dentro de otro recipiente más grande, apoyado sobre tacos de madera o corcho.



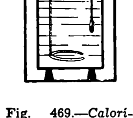


Fig. 469.—*Calorímetro de mezclas.*

En su interior se coloca una masa M de agua; lleva, además un agitador y un termómetro sensible.

Supongamos que se trate de determinar el calor específico de un cuerpo dado de masa *m*. Se calienta hasta una temperatura conocida *T*, y luego se lo coloca en el calorímetro cuya temperatura inicial t_1 es conocida.

El cuerpo cederá calor, y el conjunto alcanzará, después de cierto tiempo, una temperatura final t_f.

De acuerdo con la fórmula [2], la cantidad de calor *recibido* por el cuerpo es:

$$Q_1 = m \cdot c \; (t_f - T) \qquad [8]$$

en la cual *c* es el calor específico del cuerpo.

Por otra parte, ha variado también la cantidad de calor en el calorímetro. Suponiendo que el recipiente, el termómetro y el agitador no absorben calor, la cantidad de calor recibido es:

$$Q_2 = Mc_0 \; (t_f - t_1) \qquad [9]$$

siendo c_0 el calor específico del agua.

Como el sistema formado por el cuerpo y el calorímetro no recibe ni pierde calor del exterior, la suma de los calores [8] y [9] debe ser nula:

$$Q_1 + Q_2 = mc \; (t_f - T) + Mc_0 \; (t_f - t_1) = 0 \qquad [10]$$

o sea:

$$- mc \; (t_f - T) = Mc_0 \; (t_f - t_1)$$

cambiando de signo:

$$mc \; (T - t_f) = Mc_0 \; (t_f - t_1) \qquad [11]$$

y el calor específico:

$$c = \frac{Mc_0 \ (t_f - t_1)}{m \ (T - t_f)} \qquad [12]$$

Como el calor específico del agua puede tomarse igual a 1, esta fórmula puede escribirse:

$$c = \frac{M \ (t_f - t_1)}{m \ (T - t_f)} \qquad [12']$$

Se obtiene así el calor específico buscado.
En la práctica se debe tener en cuenta que el recipiente calorimétrico, el agitador y el termómetro absorben calor.

Si son: m_c y c_c masa y calor específico del recipiente

m_a y c_a los del agitador

m_t y c_t los del termómetro, entonces la fórmula

[9] se transforma en:

$$Q_2 = Mc_0 \ (t_f - t_1) + m_c c_c \ (t_f - t_1) + m_a c_a \ (t_f - t_1) + m_t c_t \ (t_f - t_1)$$

o sea:

$$Q_2 = (Mc_0 + m_c c_c + m_a c_a + m_t c_t) \ (t_f - t_1) \qquad [13]$$

Esta expresión nos dice que la fórmula [9] es válida si, en lugar del producto Mc_0, ponemos la suma de los productos masa por calor específico de todos los elementos que integran el calorímetro. Esta suma se denomina *capacidad calorífica* o *equivalente en agua,* pues expresa la cantidad de gramos de agua que son necesarios para absorber la misma cantidad de calor que ese conjunto de cuerpos, por cada grado de variación de temperatura (admitiendo que $c_0 = 1$).

Ejemplo:

Se tiene un calorímetro de latón con 400 g de agua a 17°,2 C. y se coloca en él un cuerpo de cobre de 65 g a la temperatura de 100° C. Calcular el calor específico del cobre si la temperatura final es 18°37, sabiendo que el calorímetro y agitador son de latón y pesan 290 gr.
Se supone despreciable el calor absorbido por el termómetro.

Solución: de las tablas el calor específico del latón:

$c_c = 0.097$ **cal/g.**

luego:

$$\begin{aligned} M_a &= 400\ g \\ m_c\, c_c + m_a\, c_a = 290 \times 0.097 &= \ \ 28\ g \\ \hline M &= 428\ g \end{aligned}$$

Aplicando [12] $$c = \frac{428 \times (18°,37 - 17°,2)}{65 \times (100° - 18°,37)} = 0.094 \frac{cal}{g}$$

En las determinaciones de precisión, es necesario tener también en cuenta que el calorímetro, a pesar de su aislación térmica, intercambia calor con el ambiente. Para evitar su influencia se efectúan correcciones adecuadas.

§ 251. — **Calorímetros de hielo.** — El principio de la aplicación de los calorímetros de hielo ha quedado expuesto al referirnos al concepto de cantidad de calor: se trata de medir cantidades de calor por la masa de hielo fundido. Para ello, sabemos que cada gramo de hielo necesita, para fundirse a cero grado, 80,025 calorías. Los distintos calorímetros de hielo se diferencian en la manera cómo se mide la masa de hielo que se funde.

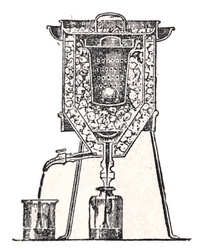


Fig. 470. — *Calorímetro de hielo.*

En el tipo clásico de Lavoisier y Laplace (fig. 470) se recoge directamente el agua producto de la fusión.

Se evita la llegada de calor del ambiente rodeando al hielo que constituye el calorímetro propiamente dicho con una capa de hielo, como se aprecia en la fig. 470.

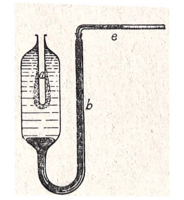


Fig. 471.— *Calorímetro de Bunsen.*

En el calorímetro de Bunsen se determina el hielo fundido por la variación de volumen: cada gramo de hielo que se funde experimenta una disminución de volumen de 0,09070 cm³, y recíprocamente, cada cm³ de disminución de volumen corresponde a 11,025 gr de

hielo fundido, o sea $80,025 \times 11,025 = 882,3 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$

En la figura se puede observar la construcción de un calorímetro de Bunsen. El tubo *a*, donde se colocan los cuerpos cuyo calor específico se desea medir, está rodeado por otro tubo de mayor diámetro soldado en su parte superior. Entre los dos hay una masa de agua, de la cual una parte se congela colocando una sustancia refrigerante en *a*. En la parte inferior hay mercurio, que continúa por el tubo lateral *b* y en el capilar calibrado *c*. Las variaciones de volumen del hielo *h* se miden por el corrimiento del índice de mercurio en el capilar. Si se corre *n* divisiones y el volumen que corresponde a cada una es *v*, la variación total será:

$$\Delta v = nv \qquad [14]$$

Como a cada cm³ corresponden 882,3 cal, al volumen Δv corresponderá una cantidad de calor:

$$Q = 882{,}3 \cdot \Delta v = 882{,}3 \; n \cdot v \text{ (cal)} \qquad [15]$$

§ 252. — **Calor específico de gases.** — En los gases debemos distinguir dos calores específicos: a volumen y a presión constante.

En un caso es la cantidad de calor necesaria para elevar en 1° la temperatura de la unidad de masa manteniendo constante el volumen. En el otro, manteniendo constante la presión. Los designaremos con las letras c_v y c_p.

Siempre se verifica que:

$$c_p > c_v \qquad [16]$$

y es fácil comprender la razón: imaginemos un recipiente que contiene 1 g de un gas cualquiera a la temperatura *t* y presión *p*. Si lo calentamos hasta $t + 1$ grado, manteniendo constante el volumen, debemos proporcionarle al gas una cantidad de calor que mide su calor específico a esa temperatura.

En el estado final, la presión habrá aumentado, según se ha visto al estudiar la dilatación de gases a volumen constante.

Si, en cambio, calentamos el gas manteniendo constante la presión, debemos aumentar su volumen, y al llegar a la temperatura $t + 1$ habremos entregado una cantidad de calor que mide el calor específico c_p a presión constante. Habrá sido necesario realizar un trabajo exterior, al dilatar el gas venciendo la presión exterior, y, para ello debe proporcionársele una cantidad de calor igual a la diferencia entre ambos calores es-

pecíficos. Veremos en el capítulo siguiente cómo se calcula esa diferencia.

Los calores específicos c_p y c_v son independientes de la presión y la relación:

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \qquad [17]$$

es una constante para cada gas, que, por lo dicho, será mayor que la unidad.

Experimentalmente es más sencilla la determinación de c_p (a presión constante), y conociendo κ determinado por otros métodos, se calcula c_v. Para esta determinación se hace circular el gas por un primer recipiente donde se calienta a la temperatura T (figura 472), y luego, por el serpentín del calorímetro, cuya temperatura inicial es t_0. Al final, cuando ha circulado una masa m de gas, la temperatura del calorímetro es t. Llamando M al equivalente total en agua del calorímetro y el serpentín, aplicamos la ecuación calorimétrica [12], pero debemos tener en cuenta que la primera parte de la corriente de gas salió del calorímetro a su temperatura inicial t_0, y la última a la temperatura final t_f. Todo ocurre como si, en el calorímetro, toda la masa de gas se hubiera enfriado desde su temperatura inicial T a una temperatura final.

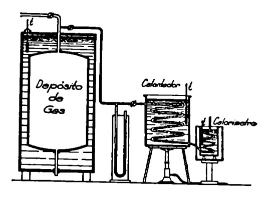


Fig. 472.—*Instalación para medir calor específico de gases a presión constante.*

$$t'_f = \frac{t_0 + t_f}{2} \qquad [18]$$

Aplicando la fórmula [12']

$$c_p = \frac{M\ (t_f - t_0)}{m\ (T - t'_f)} \qquad [19]$$

Para el aire se ha obtenido:

$$c_p = 0{,}2375\ \frac{cal}{g}\ ;\ c_v = 0{,}1690\ \frac{cal}{g}\ ;\ \kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}40$$

Para el hidrógeno:

$$c_p = 3{,}41\ \frac{cal}{g}\ ;\ c_v = 2{,}42\ \frac{cal}{g}\ ;\ \kappa = 1{,}407$$

CAPITULO XXI

EQUIVALENTE MECANICO DEL CALOR

CONSERVACIÓN DE LA ENERGIA

§ 253.—**Equivalente mecánico del calor. - Principio de equivalencia.** — En numerosas experiencias comprobamos que a la realización de un trabajo corresponde la aparición de una cantidad de calor. En el eslabón neumático (fig. 473) una rápida compresión del gas, aumenta la temperatura y llega a producir la inflamación de un trozo de yesca colocado en el pistón.

Frotando dos trozos de madera, puede llegar a producirse su combustión. En ambos casos se ha obtenido calor a expensas del trabajo de una fuerza.

Claro es que debe distinguirse entre el calor que se produce por el trabajo y el que se genera por la combustión una vez que ésta se ha iniciado. Ahora nos interesa sólo el primero, y para poderlo calcular nos vamos a referir exclusivamente a aquellas experiencias en que el cuerpo o sistema de cuerpos vuelve al estado inicial. Así quedará excluído, por ejemplo, el caso del fósforo que frotado se enciende y desarrolla calor, pero en el estado final constituye un sistema de cuerpos completamente distinto al del estado inicial, pues queda un residuo sólido: parte se ha transformado en gas y se ha combinado con el oxígeno del aire que lo rodea.

La experiencia comprueba que, *cuando el cuerpo o sistema de cuerpos, después de experimentar una serie de transformaciones, vuelve a su estado inicial, el trabajo exterior realizado es proporcional a la cantidad de calor desarrollado.*

Figura. 473. — *Eslabón neumático.*

Por lo tanto, si se ha realizado un trabajo L y se ha desarrollado una cantidad de calor Q, se verifica:

$$L = J \cdot Q \qquad (1)$$

siendo J una **constante universal** que sólo depende del sistema de unidades, y se llama: equivalente mecánico del calor. En unidades técnicas es:

$$J = 427 \frac{Kgm}{Cal} \qquad [2]$$

Veamos otro ejemplo: imaginemos un volante que gira rozando contra un freno. La fuerza de frotamiento realiza trabajo y se produce un calentamiento. Si lo detenemos y dejamos enfriar, el sistema volverá a la temperatura inicial y con ello estará exactamente en las condiciones iniciales. Las transformaciones que se han producido consistieron: en la realización de un cierto trabajo de rozamiento L y la producción de una cantidad de calor Q. El **principio de equivalencia** dice que ese trabajo y la cantidad de calor son proporcionales.

§ 254. — **Determinación del equivalente mecánico del calor. Método de Joule.** — Numerosas experiencias se han realizado para determinar el equivalente mecánico del calor. Entre las primeras se cita la de Rumford que en 1798 determinó el calor producido al taladrar cañones, para lo cual sumergió en agua el taladro y la pieza a taladrar. Con una valuación proximada del trabajo realizado por el caballo que movía el taladro obtuvo el valor:

$$J = 570{,}9 \frac{Kgm}{Cal}$$

Entre los métodos ya más exactos figura en primer término el del ingeniero inglés Joule quien utilizó el aparato de la figura 474. Se trata de transformar trabajo en calor y medir ambas magnitudes. Para ello tomó un calorímetro de metal, dentro del cual colocó un eje con un sistema de aletas laterales que se movían entre otras fijas al recipiente. En la parte superior del eje, un rodillo de madera llevaba arrollados dos hilos de cuyos extremos pendían dos pesos iguales P, que al caer provocaban la rotación del eje. El trabajo de caída se transforma en calor por el frotamiento de las paletas con el agua del calorímetro.

La cantidad de calor producido se calcula conociendo la masa M de agua equivalente al calorímetro con las paletas y el líquido contenido y las temperaturas inicial t_0 y final t_f.

$$Q = M\ (t_f - t_0) \qquad [3]$$

El trabajo que ha producido esa cantidad de calor será el de los dos pesos P que descienden de una altura h:

$$L' = 2\ Ph \qquad [4]$$

Pero se debe descontar el trabajo que se pierde por los rozamientos en las poleas y el eje y, además, el que se emplea en proporcionar a los pesos la energía cinética con que llegan al suelo.

Para establecer el valor de este trabajo se desvinculan las paletas del cilindro sacando una clavija *C* (fig. 474 b) y se arrolla el hilo de manera que al bajar una pesa la otra suba.

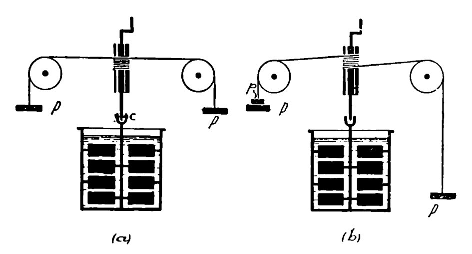


Fig. 474.—*Método de Joule para la determinación del equivalente mecánico del calor.*

Las dos pesas iguales P equilibran sus momentos respecto al eje de rotación.

Agregando entonces una pesa p se producirá el movimiento del sistema.

Graduando p de modo que la velocidad adquirida por las pesas P al llegar al suelo sea igual a la que adquirirían en el caso anterior, podemos decir que el trabajo $p \cdot h$ mide la suma de los trabajos de las fuerzas de roce y del gastado en acelerar las pesas *P* en cada caída.

El trabajo transformado en calor es, para cada descenso:

$$2\,Ph - ph = (2\,P - p)\,h \qquad [5]$$

Para tener una elevación apreciable de temperatura hay que producir varias caídas sucesivas, cuidando de sacar la clavija *C* cuando se levantan las pesas con la manivela. Siendo *n* el número de caídas, se tiene:

$$J = \frac{L}{Q} = \frac{n\,(2\,P - p)\,h}{M\,(t_f - t_o)} \qquad [6]$$

Esta experiencia se ha repetido con ligeras variantes. Rowland producía la rotación del calorímetro permaneciendo fijas las paletas interiores; Hirn determinó el calor desarrollado en el choque de dos cuerpos inelásticos, y Mayer hizo el cálculo en base a los calores específicos de los gases.

De este conjunto de determinaciones resulta como más probable el valor:

$$J = 427 \frac{Kgm}{Cal} \qquad [7]$$

En unidades prácticas:

$$J = 4{,}184 \frac{\text{joule}}{\text{cal}} \qquad [8]$$

Aplicación: Un vehículo de 2.000 Kgr. marcha a 60 Km/hora. Calcular el calor que se desarrolla en los frenos al detenerlo, suponiendo que es el único lugar donde se origina resistencias al movimiento.

Solución:

$$L = E = ½ Mv^2 = ½ \frac{P}{g} v^2 = 28300 \ Kgm.$$

$$Q = \frac{L}{J} = \frac{28300}{427} = 66{,}3 \ Cal = 66300 \ cal$$

§ 255.—**Cálculo de la diferencia c_p — c_v.** — Hemos dicho ya que la diferencia entre los calores específicos de los gases a presión constante y a volumen constante, se debe al trabajo exterior que se tiene que realizar calentando a presión constante.

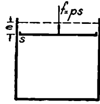


Fig. 475.

Imaginemos 1 g de gas a la presión p en el recipiente de volumen V cerrado con un émbolo de superficie s. Si lo calentamos de modo que su temperatura aumente en 1 grado, el volumen experimenta un aumento.

$$\Delta V = V \, . \, \alpha \qquad [9]$$

La fuerza $f = p\ s$ que sostiene el ámbolo, realizará un trabajo:

$$L = f \, . \, e = p. \, s. \, e = p \, \Delta V$$

o sea:

$$L = p \ V \ \alpha \qquad [10]$$

Pero ese trabajo corresponde a la diferencia entre los calores específicos c_p y c_v, luego:

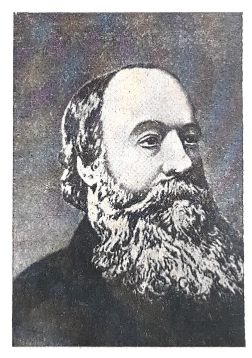
$$J \ (c_p - c_v) = p \ V \ \alpha \qquad [11]$$



SADI CARNOT
(1796 - 1832)

Genial físico francés, que a la edad de 28 años, descubrió la ley que rige la transformación del calor en trabajo, enunciando el llamado: Segundo principio de la termodinámica.

Su publicación "Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas aptas para desarrollar esta potencia": estableció las condiciones ideales del funcionamiento de las máquinas térmicas para obtener el máximo rendimiento, dando origen al perfeccionamiento de los dispositivos industriales al par que abría nuevos horizontes a la física teórica.



JAMES PRESCOTT JULES
(1818 - 1889)

Físico inglés, cuyos trabajos contribuyeron en forma decisiva al establecimiento del principio de conservación de la energía.

Estudió química con Dalton y, en vista de su entusiasmo por el estudio, su padre, adinerado cervecero de Manchester, le construyó un laboratorio particular junto a su negocio.

Determinó el equivalente mecánico del calor y descubrió la ley del calentamiento de los conductores por la corriente eléctrica.

En colaboración con Lord Kelvin investigó las propiedades térmicas de los gases; realizo importantes trabajos sobre magnetismo y fue el primero en probar experimentalmente la equivalencia de diversas formas de energía.

Si elegimos $p = p_0 = 760$ mm de Hg y $V = V_0$ = volumen específico en condiciones normales, o sea, a 0° y 760 mm de presión, tendremos que:

$$J \cdot (c_p - c_v) = p_0 V_0 \alpha \qquad [12]$$

Para el aire; siendo:

$$V_0 = \frac{1}{0{,}001293} \frac{cm^3}{g} \; ; \; \alpha = \frac{1}{273} \; ; \; p_0 = 1033 \frac{gr}{cm^2}$$

$$J = 4{,}184 \frac{Joule}{cal} = 4{,}184 \times 10^7 \frac{erg}{cal}$$

$$c_p - c_v = \frac{1033 \times 981 \times 10^{-7}}{4{,}184 \times 0{,}001293 \times 273} = 0{,}0686$$

De los valores dados en el § 252 resulta:

$$c_p - c_v = 0{,}2375 - 0{,}1690 = 0{,}0685$$

§ 256. — **Teoría mecánica del calor.** — Una de las consecuencias más importantes de la determinación del equivalente mecánico del calor es el apoyo que aporta a la teoría mecánica del calor. Hasta fines del siglo XVIII se admitía la existencia del *flúido calórico.* Es decir, el calor debía ser un flúido compresible y sin peso cuya manifestación exterior sería la temperatura. Hasta la calorimetría no hay inconveniente en admitirlo así. Las experiencias de producción de calor por frotamiento introducen una dificultad que la teoría salvaba, admitiendo que en el frotamiento los cuerpos se pulverizan, y esa materia en estado pulverulento posee menor capacidad calorífica, por lo cual, sin variar la cantidad de calor, se obtiene un aumento de temperatura.

En 1799 Davy realizó una experiencia decisiva en contra de esta teoría: frotó dos trozos de hielo bajo la campana de una máquina neumática enfriada por debajo de cero grado y así se fundieron ambos trozos de hielo cuya temperatura inicial era — 2° C, obteniendo agua a + 2° C. Era evidente que, en este caso, no cabía la explicación anterior, pues el resultado del frotamiento era la producción de un cuerpo de mayor capacidad calorífica (el calor específico del hielo es 0,5 y el del agua 1) y al mismo tiempo un aumento de temperatura.

Resulta de estas experiencias y de las que se realizaron para determinar el equivalente mecánico del calor que puede establecerse una estrecha vinculación entre calor y energía mecánica. Según la teoría mecánica del calor que actualmente aceptamos, los fenómenos térmicos consisten en modificaciones de la energía mecánica de las moléculas de los cuerpos.

En los gases, de acuerdo con lo que llamamos la *teoría cinética de los gases,* admitimos que sus moléculas se encuen-

tran animadas de movimientos de traslación rectilíneos, chocando entre sí y con las paredes del recipiente. La presión es el resultado de los choques de las moléculas con las paredes. Se admite que, en condiciones normales, el volumen de las moléculas es prácticamente nulo comparado con el recipiente en que se encuentran contenidas, o sea que sus diámetros son nulos comparados con las distancias medias entre moléculas (libre camino medio).

Se demuestra, en base a estas hipótesis, que la presión que el gas ejerce sobre las paredes es proporcional a la *energía cinética media* de traslación de las moléculas contenidas en la unidad de volumen. Llamando energía cinética media a la suma de la energía cinética de todas las moléculas en un instante dado, dividida por el número total de moléculas.

Se admite que, al modificar la temperatura, se modifica la energía cinética de las moléculas del gas y que, en dos gases diferentes a igual temperatura, la energía cinética media de traslación de las moléculas es la misma.

Por eso al mezclarlos a igual temperatura se obtiene una masa de gas también a la misma temperatura, pues se producen choques elásticos de moléculas de igual energía cinética media, aunque sus masas sean diferentes.

Proporcionar calor al gas equivale a proporcionar energía cinética a sus moléculas, y aumentar su temperatura equivale a aumentar esa energía.

A temperatura constante, la energía no varía, y si disminuímos el volumen a la mitad, el número de choques contra las paredes se duplica, y, por lo tanto, se duplica la presión (Ley de Boyle).

Esta imagen mecánica del gas explica también por qué ocupa todo el volumen del recipiente que lo contiene.

La teoría cinética de los gases explica todas las leyes de los gases, pero admitiendo que las moléculas son *puntos materiales;* por eso se explica también que la ley de Boyle-Mariotte, válida para los gases ideales, pierda validez en los gases reales muy comprimidos, pues en ese caso las moléculas están muy próximas y su diámetro no es despreciable comparado con las distancias que las separan.

Las conclusiones de esta teoría concuerdan muy bien con los resultados experimentales.

El número de moléculas contenido en una molécula gramo de cualquier gas es:

$$N = 60{,}2 \times 10^{22} \qquad [13]$$

(Número de Avogadro).

Para los líquidos y sólidos vale también la teoría mecánica del calor, con la diferencia que en ellos no es válida la imagen

de las moléculas infinitamente pequeñas con respecto a la distancia que las separa.

Admitimos también para estos cuerpos que el calor se transforma en energía mecánica molecular, pero en los sólidos, como cada átomo ocupa una posición bien determinada, esa energía es de naturaleza vibratoria. Cada uno oscila alrededor de su posición de equilibrio con una energía que depende de la temperatura.

§ 257. — **Imposibilidad del móvil perpetuo de primera especie.** — El principio de equivalencia, representado por la fórmula [1]: JQ = L, se aplica a todo sistema que haya recorrido un ciclo cerrado, o sea que vuelva a las condiciones iniciales. Quiere decir que, en esas condiciones, para que sea Q = 0, debe ser L = 0, y recíprocamente. Por lo tanto, es **imposible construir una máquina térmica tal que, después de recorrer un ciclo cerrado, haya producido como única modificación la realización de un trabajo exterior.**

Un motor en esas condiciones se denomina **móvil perpetuo de primera especie.**

Se lo diferencia del *móvil perpetuo de segunda especie,* que es aquel que funciona produciendo trabajo y quitando calor a una única fuente de calor. El segundo principio de la Termodinámica, que no estudiaremos en este libro, expresa la imposibilidad de la existencia de un móvil en tales condiciones, pues para que funcione una máquina térmica es necesario que tome calor de una fuente caliente y entregue la parte que no se transforma en trabajo, a otra fuente más fría.

Por ello es imposible construir un navío que camine enfriando el agua del mar.

§ 258. — **Principio de conservación de la energía.** — Hemos comprobado la equivalencia entre calor y trabajo cuando el sistema vuelve al estado inicial (ciclo cerrado).

La fórmula [1] podemos escribirla así:

$$JQ + L = 0$$

y es válida si atribuímos signo positivo al calor Q que el sistema recibe y negativo en caso contrario, y signo positivo al trabajo cuando las fuerzas *del medio exterior* realizan trabajo venciendo a las fuerzas exteriores del sistema.

(Por ejemplo, si se trata de un gas *que se comprime,* la presión exterior realiza trabajo positivo).

Cuando el sistema pasa de un primer estado A a otro estado B, distinto del anterior, la suma $JQ + L$ tendrá un va-

lor determinado que, como veremos, no depende del camino seguido en la transformación.

Con un ejemplo entenderemos fácilmente cómo se puede pasar de un estado a otro por varios caminos: imaginemos que tenemos un dm³ de gas a 0° y 760 mm de presión y lo queremos llevar a ocupar 1 m³ a 100° C de temperatura. (La presión final tendrá un valor que podemos calcular aplicando la ecuación de estado de los gases perfectos).

Un camino a seguir sería el siguiente: expandir primero el gas a temperatura constante hasta alcanzar el volumen final y luego calentar a volumen constante hasta que la temperatura sea de 100° C.

Otro camino podría consistir en calentar primero hasta 100° sin modificar el volumen y expandir luego a temperatura constante.

Se demuestra que, cualquiera que sea el camino seguido para pasar del estado inicial al estado final, la suma total $J\,Q + L$ es la misma, aunque en general cada uno de los términos Q y L separadamente sea distinto. Es decir, si Q_1 y L_1 son los valores del calor y el trabajo recibidos por el sistema siguiendo el primer camino, y Q_2, L_2 siguiendo el segundo, se verifica que:

$$J\,Q_1 + L_1 = J\,Q_2 + L_2$$

La demostración no es difícil; basta imaginar una transformación que lleve al sistema del estado final nuevamente al estado inicial; si en ella los valores de calor y trabajo recibidos son respectivamente Q_3 y L_3, como esta transformación forma con cualquiera de las anteriores un ciclo cerrado debe verificarse la fórmula [2], o sea:

$$(J\,Q_2 + L_2) + (J\,Q_3 + L_3) = 0 \qquad [14]$$

y

$$(J\,Q_1 + L_1) + (J\,Q_3 + L_3) = 0 \qquad [15]$$

lo cual sólo se cumple si:

$$J\,Q_1 + L_1 = J\,Q_2 + L_2 \qquad [16]$$

como deseábamos demostrar.

Luego decimos: **cuando un sistema pasa de un estado inicial A a otro estado final B, el valor de la suma:**

$$JQ + L = U \qquad [17]$$

sólo depende de los estados inicial y final del sistema.

El valor U representa la variación de energía interna del sistema.

Por ejemplo: si tenemos un dm^3 de aire a 0°C de temperatura y presión 1033 $\frac{gr}{cm^2}$ y lo calentamos a presión constante hasta la temperatura de 100°C, tendremos:

$$\text{masa de gas: } m = 1000 \times 0{,}001293 = 1{,}293\ g$$

$$\text{estado inicial: } p_1 = 1033 \frac{gr}{cm^2};\ V_1 = 1000\ cm^3,\ t_1 = 0°C$$

$$\text{estado final: } p_2 = 1033 \frac{gr}{cn^2};\ V_2 = V_1\ (1 + \alpha\ t) = 1366\ cm^3;\ t_2 = 100°C$$

la cantidad de calor que el gas recibe será:

$$Q = m\ c_p\ (t_2 - t_1) = 1{,}293 \times 0{,}238 \times 100 = 30{,}77\ cal.$$

El trabajo de las fuerzas exteriores será negativo, pues el gas se expande, y está medido por el producto de la presión por la variación de volumen:

$$L = -p\ (V_2 - V_1) = -1033\ (1366 - 1000) = -378078\ gr\ cm = -3{,}78\ kgm.$$

aplicando la fórmula [17]:

$$U = J\ Q + L = 0{,}427 \frac{kgm}{cal}\ 30{,}77\ cal - 3{,}78\ kgm = 9{,}36\ kgm$$

Es decir, la variación de energía interna del gas ha sido de 9,36 kgm; cuyo equivalente en calorías es:

$$U = \frac{9{,}36}{0{,}427} = 21{,}9\ cal$$

Significa esto que, de las 30,77 calorías que se le proporcionaron al gas para calentarlo, el equivalente a 3,78 kgm (8,85 cal.) se emplearon en trabajo de dilatación y las 21,9 restantes han quedado en el gas en forma de *energía interna*. (En este caso aumentando la energía cinética de las moléculas).

La fórmula [17] expresa el **principio de conservación de la energía**, pues nos dice que la energía que el sistema recibe en forma de calor o trabajo exterior queda en él aumentando su energía interna.

El de conservación de la energía mecánica (§ 76) es un caso particular de éste, pues se refiere a las transformaciones en que sólo se pone en juego energía mecánica (potencial o cinética).

CAPITULO XXII

PROPAGACIÓN DEL CALOR

Conducción, convección y radiación.

§ 259. — **Propagación.** — Sabemos que el calor pasa de los cuerpos más calientes a los más fríos. En algunos casos, directamente a través de materia, en otros sin interposición de materia. En los primeros se producen los fenómenos de conducción o convección, según que la materia interpuesta sea sólida o flúida. Cuando la propagación se produce a través del vacío, se denomina radiación.

§ 260. — **Conducción.** — La propagación del calor a través de un sólido se llama **conducción.** Todos los sólidos son más o menos conductores del calor. Entre los metales figuran los mejores conductores.

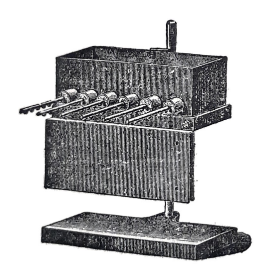


Fig. 476.—*La propagación del calor difiere según la sustancia.*

Una sencilla experiencia permitirá comprobar que no todos los metales conducen igualmente el calor. En la fig. 476 vemos un aparato formado por un recipiente con orificios próximos a la base en los cuales se colocan barras metálicas de igual dimensión y distinto material con pequeñas esferillas de cera adheridas en toda su longitud.

Al colocar agua hirviendo en el recipiente, el calor que se propaga irá desprendiendo las esferas. Se observa que la distancia hasta la cual se desprenden las esferas es distinta en cada una. La plata y el cobre son los metales más conductores.

La teoría de la conducción calorífica fué desarrollada por Fourier y se propone resolver problemas como el siguiente: dada una barra metálica colocada entre dos cuerpos de temperaturas t_1 y t_2, determinar la temperatura en cada punto de la barra y la cantidad de calor que pasa de una fuente a otra en un tiempo dado.

Cuando la cantidad de calor que llega a cada elemento de volumen es igual a la que sale en el mismo intervalo de tiempo, la temperatura es constante en cada punto y el fenómeno se llama *estacionario.*

En los fenómenos de conducción, el calor pasa a través del sólido, de molécula a molécula, sin que se produzca transporte de materia.

La conductibilidad se caracteriza por un coeficiente λ que se llama coeficiente de conductibilidad y podemos definirlo así: es la cantidad de calor que en la unidad de tiempo atraviesa la unidad de superficie de una placa de ese material, de espesor igual a 1, cuando la diferencia de temperatura entre ambas caras es igual a 1 grado centígrado.

En unidades técnicas será:

$$[\lambda] = \frac{Cal}{m\ hora}$$

En unidades c. g. s.:

$$[\lambda] = \frac{cal}{cm\ seg}$$

Para la plata, el coeficiente λ es igual a *1* en unidades c. g. s. y a 360 en unidades técnicas, o sea: dada una lámina de plata de 1 cm de espesor, si la diferencia de temperatura entre ambas caras es de 1 grado, por cada centímetro cuadrado pasa una caloría por segundo.

La cantidad de calor que pasa, entonces, normalmente a una superficie s durante el tiempo τ es:

$$Q = \lambda s \frac{t_2 - t_1}{e} \tau$$

siendo $\frac{t_2 - t_1}{e}$ el cociente de la diferencia de temperatura entre dos puntos próximos situados sobre la perpendicular a la superficie, por la distancia e que los separa. Es la caída de

temperatura por unidad de longitud, llamada *gradiente de temperatura* en esa dirección.

Ejemplo:

Se tiene una placa extensa de plata de $e = 2$ cm de espesor y la diferencia de temperatura entre sus caras es de 20°. Calcular la cantidad de calor que pasa por cada dm² en cada unidad de tiempo.

Solución:

$$Q = \lambda\, s\, \frac{t_2 - t_1}{e}$$

$$Q = 1\, \frac{cal}{cm\ seg} \times 100\ cm^2\, \frac{20}{2\ cm} = 1000\, \frac{cal}{seg}$$

Luego: atraviesan la placa mil calorías por segundo.

Para otras sustancias el coeficiente de conductibilidad es muy diferente; así, por ejemplo, en unidades c. g. s. tenemos:

Hierro	$\lambda = 0{,}2$
Plomo	$\lambda = 0{,}08$
Latón	$\lambda = 0{,}3$
Platino	$\lambda = 0{,}2$
Hielo	$\lambda = 0{,}0042$
Corcho	$\lambda = 0{,}0001$

Debemos notar que hemos tomado el ejemplo más sencillo, de una lámina indefinida, de espesor constante y con sus caras a temperatura también uniforme (problema del muro). Los problemas que se presentan en la práctica son más complejos y casi siempre sólo se los puede resolver en forma aproximada.

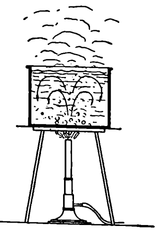


Fig. 477.—*Convección*.

§ 261.—**Convección.** — Se produce en los fenómenos de propagación del calor a través de los flúidos y se caracteriza por la producción de un arrastre de materia.

Cuando calentamos agua en un recipiente, es fácil observar que se produce una circulación del líquido que asciende en la parte que recibe calor y es reemplazado por el líquido frío de la parte superior, que desciende (fig. 477). **Acercando**

la mano a la parte superior de una estufa encendida se nota que existe una corriente ascendente de aire. Ese fenómeno recibe el nombre de convección, y es debido a la disminución de densidad del flúido que se calienta. Por esa razón se colocan los caloríferos y radiadores al nivel del piso y los refrigerantes de las cámaras frigoríficas colgados del techo. Invirtiendo la colocación no se favorece el fenómeno de convección y el calor se propaga en el flúido por conducción.

Un ejemplo clásico es el del enfriamiento del agua de un lago, por acción del aire frío. Mientras la temperatura es superior a 4° C, el agua que se enfría baja y es reemplazada por agua más caliente (convección). Cuando toda la masa esté a 4°, la que se enfríe en la superficie tendrá menor densidad que el resto y quedará allí; dejará de producirse convección y continuará el enfriamiento por conducción. Por eso la superficie llega a congelarse y a suficiente profundidad la temperatura sigue siendo de 4° C.

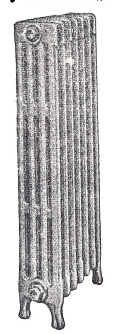


Fig. 478.—*El radiador de calefacción se coloca al nivel del suelo y todo el ambiente se caldea por convección.*

El cálculo de la cantidad de calor trasmitido por convección es más complejo que en la conducción, pues intervienen coeficientes que dependen de la forma y manera de estar colocadas las superficies que calientan al flúido.

En general, se admite que la cantidad de calor que recibe el flúido es proporcional a la superficie de calefacción y a la diferencia entre su temperatura y la del flúido.

§ 262. — **Radiación.** — La trasmisión por *radiación* se produce sin intervención de los medios materiales. Es así que llega el calor del sol a la tierra. Su estudio cuadra más dentro de la óptica, pues se trata de la propagación de radiaciones del mismo tipo que las radiaciones luminosas y que se denominan *rayos infrarrojos.*

En realidad *irradian calor* todos los cuerpos, pero la energía irradiada depende de la temperatura (es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta).

Cuando estamos frente a una estufa, recibimos calor porque nos lo trasmite el aire, pero gran parte nos llega directamente por radiación. Ocurre, en algunos casos, que el aire de la habitación está frío y, sin embargo, sentimos exceso de calor en la parte del cuerpo colocada frente a una estufa con fuego muy vivo.

Los que practican deportes en la nieve en días de mucho

sol saben que pueden andar sin abrigo, pues aunque el aire está a algunos grados bajo cero, el calor radiante que refleja la nieve mantiene el cuerpo caliente.

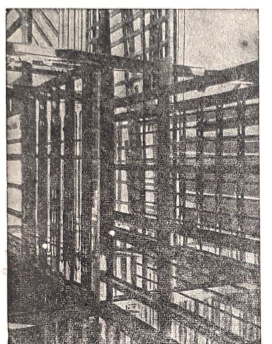
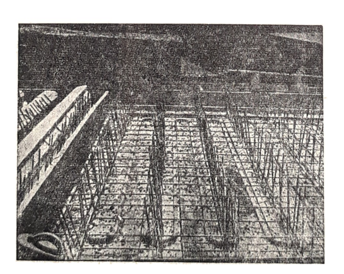


Fig. 479.—*Cañerías de calefacción preparadas para quedar embutidas en los muros radiantes.*

Estos principios son los que en la actualidad se aplican en la realización de instalaciones de calefacción por *losas radiantes* en las cuales se reemplaza el clásico *radiador* por el cual circula vapor de agua o agua caliente, y está destinado a entibiar el aire, por cañerías en las paredes y techos que los mantienen a temperaturas relativamente bajas (30 a 40°), de modo que irradian calor suficiente para producir una sensación agradable aún con aire frío en la habitación (fig. 479 y 480).



CAPÍTULO XXIII

CAMBIOS DE ESTADO - FUSIÓN - VAPORIZACIÓN

HIGROMÉTRICA - VOLATILIZACIÓN

§ 263.— **Consideraciones generales.** — Los cuerpos se presentan en la naturaleza en diversos estados de agregación. Hemos estudiado la acción del calor sobre ellos, distinguiendo según se presenten en estado sólido, líquido o gaseoso.

Trataremos ahora de establecer las leyes y condiciones generales en que una sustancia pasa, por acción del calor u otras causas, de un estado a otro, o bien en qué condiciones podemos tener en equilibrio dos o más porciones de una misma sustancia, cada una de ellas en un estado.

Limitaremos nuestro estudio al caso de los cuerpos puros.

§ 264.— **Cuerpos puros.** — Son cuerpos puros aquellos que tienen propiedades bien definidas, las que no se alteran por los cambios físicos a que se los somete.

El agua destilada es un cuerpo puro, caracterizado por propiedades físicas y químicas definidas; además, sometiendo una masa de agua a congelaciones, evaporaciones, filtraciones a través de membranas, compresiones, etc., se obtiene al final siempre agua con las mismas características iniciales.

Por el contrario, una solución de agua salada, al congelarse, deposita cristales de sal y cristales de hielo separables y de distintas propiedades.

El agua salada no es, pues, un cuerpo puro.

Los cuerpos simples, como el oxígeno, el hidrógeno, el mercurio, y los cuerpos de constitución química definida, como el alcohol, la bencina, el cloruro de sodio, etc., etc., son cuerpos puros.

Las soluciones, las mezclas (como el aire) y las aleaciones no son cuerpos puros.

§ 265.— **Concepto de fase. - Equilibrio de fases.** — Porciones homogéneas perfectamente delimitadas de un cuerpo puro, constituyen una fase.

Así, por ejemplo: trozos de mercurio sólido, o una masa de mercurio líquido, un volumen de hidrógeno, etc.

Si, en cambio, tenemos, a temperatura adecuada, trozos de mercurio sólido en un recipiente con mercurio líquido, diremos que hay *dos fases;* una la constituye el líquido y la otra todos los trozos sólidos.

Podríamos tener, también, un recipiente con trozos de hielo, agua y vapor de agua, en cuyo caso coexisten *tres fases.*

Cuando se trata de una sola fase de un cuerpo, su estado se caracteriza por tres parámetros: presión, volumen y temperatura, fijados los cuales quedan determinadas todas las restantes propiedades físicas. Si sabemos que un recipiente de 1 dm^3 contiene oxígeno a presión normal y a temperatura de 0°, quedan determinados su densidad, calor específico, velocidad de propagación del sonido, etc., y si toda la masa es homogénea, estará en equilibrio, es decir, no se operará ningún cambio en ella. Pero si le proporcionamos cierta cantidad de calor, o la comprimimos, o efectuamos cualquier otra variación en los parámetros que caracterizan su estado, pasará a un *nuevo estado de equilibrio* en que todas las propiedades físicas adquieren nuevos valores, también perfectamente definidos. Y las mismas consideraciones podremos hacer tratándose de un líquido o un sólido.

Pero hay que destacar que, como los tres parámetros que caracterizan cada estado de equilibrio, p, V y T, están vinculados por una ecuación (que en los gases hemos llamado *ecuación de estado*), no podrán variarse arbitrariamente los tres valores, pues modificados *dos* cualesquiera de ellos, el tercero podrá calcularse con dicha ecuación. Decimos que el sistema es *bivariante.*

Así, por ejemplo, si decimos que un kilogramo de agua está sometido a la presión de 100 atmósferas y a temperatura de 80° C, no podremos fijar arbitrariamente su volumen, sino que debemos calcularlo. Para ello calcularíamos el volumen que ocupa a 1 atm y 80° C en base al que ocupa a 0° y presión de 1 atm, conociendo el coeficiente de dilatación y luego calcularíamos el volumen final conociendo el coeficiente de compresibilidad.

Estudiamos entonces distintos estados de equilibrio en una fase de un cuerpo puro.

Cuando tenemos *dos fases* de un cuerpo puro, como en el caso de trozos de hielo en agua, o líquido y su vapor, decimos que están en equilibrio cuando no varía la masa de cada una de ellas. Es decir: si en el recipiente en que están colocados los trozos de hielo

en contacto con agua observamos que no se funde hielo ni se congela agua, decimos que el sistema *está en equilibrio.*

Observamos primeramente que el estado de equilibrio no se modifica por la masa de las sustancias puestas en presencia, o sea que, si a determinada temperatura y presión están en equilibrio 1 kgr de agua con 2 kgr de hielo, también estarán en equilibrio 5 kgr de agua con 5 kgr de hielo a esa misma temperatura y presión.

Pero todo cambio de temperatura o presión modifica el estado de equilibrio. Encontraremos así que a cada temperatura existe una presión de equilibrio perfectamente definida, y, recíprocamente, a cada presión existe una temperatura de equilibrio bien determinada.

Si tenemos agua y su vapor en equilibrio a 100°, sabemos que la presión es de 760 mm, y, recíprocamente, si la presión es de 760 mm, sabemos que estarán en equilibrio a 100° C. En estos sistemas sólo puede fijarse arbitrariamente el valor de *un* parámetro: se llaman *monovariantes.*

§ 266.— **Cambios de estado.**—Si a un sistema de dos fases de un cuerpo puro, en equilibrio, le proporcionamos o quitamos calor, sin modificar la presión exterior, se modifican las masas de ambas fases hasta alcanzar nuevamente el estado de equilibrio. Así, si proporcionamos calor a la mezcla de hielo y agua en equilibrio a cero grado, una parte del hielo pasará a la fase líquida, pero no cambiará la temperatura mientras no se termine el hielo; y si al sistema formado por agua y su vapor le quitamos calor haciendo de modo que no se modifique la presión, una parte del vapor pasará a la fase líquida.

Entonces se producen los *cambios de estado,* que estudiaremos teniendo en cuenta las siguientes leyes:

1º) A cada presión existe una temperatura que llamaremos **punto de transformación.**

2º) A cada temperatura existe una presión de cambio de estado que llamaremos **presión de transformación.**

3º) A cada presión y temperatura existe una cierta cantidad de calor necesario para producir el cambio de estado, que se llama **calor de transformación.**

Así, por ejemplo, el hielo se transforma en agua (funde) a cero grado y presión de una atmósfera, absorbiendo 80,025 calorías por gramo. Por lo tanto, es: *punto de fusión a 1 atm*

= cero grado; presión de fusión a cero grado = 1 atm; calor de fusión a cero grado = 80,025 calorías/gramo.

Estudiaremos los siguientes cambios de estado:

1º) Paso de fase sólida a líquida: **fusión**, y recíprocamente: **solidificación.**

2º) Paso de fase líquida a gaseosa: **vaporización**, y viceversa: **condensación.**

3º) Paso de fase sólida a gaseosa: **volatilización**, y viceversa: **sublimación.**

4º) Paso de una fase sólida a otra: **transformaciones polimorfas y alotrópicas.**

§ 267. — **Fusión. - Leyes para p = constante.** — Cuando un cuerpo puro en estado sólido es calentado a presión constante, se verifica que al llegar a una determinada temperatura pasa del estado sólido al líquido; este fenómeno es la **fusión.**

Puede verificarse el cumplimiento de las siguientes leyes:

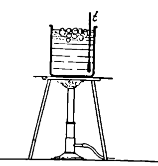


Fig. 481.—*Durante la fusión se mantiene constante la temperatura.*

1º) A una presión dada, cada cuerpo puro funde a una determinada temperatura, que se llama su **punto de fusión.**

2º) Mientras dura la fusión, la temperatura permanece constante.

Se comprueban colocando un cuerpo en un recipiente adecuado y calentándolo; el termómetro t (fig. 481) indicará el valor de la temperatura de fusión. Mientras quedan porciones sólidas la temperatura no cambia.

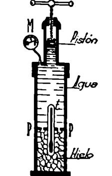


Fig. 482. — *La temperatura de una mezcla de hielo y agua disminuye al aumentar la presión.*

§ 268. — **Solidificación. - Leyes para p = constante.** — El paso del estado *líquido* al *sólido* se llama **solidificación.**

Si la solidificación se produce *a una presión invariable,* valen para ella dos leyes análogas a las del parágrafo anterior:

1º) **Cada cuerpo puro solidifica a una determinada temperatura, que es igual a su temperatura de fusión.**

2°) Durante la solidificación la temperatura permanece constante.

TABLA XXI

(p = 760 mm Hg)

Sustancia	t	f	Sustancia	t	f
Aluminio	657°,3	94	Fósforo blanco.	44°	5
Bismuto	269°,2	12,8	CO_2	—57°	—
Cromo	1505°,0	32	Agua	0°	80
Cobre	1082°,6	41	Sulfuro de carbono	—112°,8	—
Mercurio	—39°	2,8	Cloruro de sodio	780°	124
Hierro	1505°	49	Alcohol etílico	—130°	—
Níquel	1452°	65	Glicerina	20°	42
Plata	960°	26	Eter sulfúrico	—117°,6	27,4
Plomo	327°,4	5,5	Estearina	68°	48
Oro	1066°	15,9	Benzol	5°,5	30,4
Platino	1755°	27	Acido benzoico	121°	—
Azufre (rómbico)	113°	9			
Azufre (monoclínico)	119°,5	10			
Iodo	114°	—			

§ 269. — **Calor de fusión.** — Se comprueba que para producir la fusión es necesario proporcionar al sólido, que se encuentra a la temperatura de fusión, cierta cantidad de calor.

Llamamos **calor de fusión** (f) a la cantidad de calor necesario para fundir la unidad de masa del sólido a la temperatura de fusión.

En la tabla XXI figuran los calores de fusión de algunas sustancias en cal/g. El calor de fusión es igual al de solidificación.

Este calor se puede medir con un calorímetro de mezclas; supongamos que se tiene un calorímetro cuya masa total de agua, incluído el equivalente en agua del recipiente, es M y la temperatura inicial es t_1. Si la temperatura de fusión es *inferior* a la temperatura inicial del calorímetro, se echa en él una masa m de sólido a la temperatura de fusión T (caso del hielo). Si la temperatura de fusión es *mayor* que la del calorímetro, se vierte en él una masa m de líquido a la temperatura de fu-

sión (caso de los metales). En el primer caso el calorímetro pierde calor y en el segundo gana calor. La cantidad de calor *recibido* será en ambos:

$$Q = M\ (t_f - t_i)$$

Este calor proviene: del *calor de transformación* $(m.f)$ que ha perdido o ganado la sustancia al cambiar de estado (fundirse o solidificarse) y el calor que ha cedido al pasar una vez transformada, de la temperatura de fusión T hasta la temperatura final del conjunto: $mc\ (T - t_i)$, siendo c el calor específico de la sustancia en el estado final.

Como la cantidad de calor recibida por el calorímetro debe ser igual a la que ha cedido la sustancia, podemos escribir:

$$M\ (t_f - t_i) = mf + mc\ (T - t_f)$$

fórmula que nos da directamente f con signo positivo o negativo según se haya producido solidificación o fusión.

Ejemplo:

1) En un calorímetro cuyo equivalente total en agua es $M = 500\ g$ se colocan 20 g de hielo bien seco a 0°. Calcular el calor de fusión del hielo sabiendo que las temperaturas inicial y final del calorímetro son: $t_i = 18°,20$; $t_f = 14°,43$. Además es $c = 1$

$$f = \frac{M\ (t_f - t_i)}{m} - c\ (T - t_f) =$$

$$= \frac{500\ (14{,}43 - 18{,}20)}{20} - 1\ (0 - 14{,}43) = - \frac{500 \times 3{,}77}{20} + 14{,}43$$

$$f = -\ 79{,}8\ \frac{cal}{g}\ \text{(fusión)}$$

2) En el mismo calorímetro a igual temperatura inicial se vierten 50 g de plomo fundido siento $T = 327°,4$ y alcanza una temperatura final $t_f = 19{,}70°C$, sabiendo que el calor específico del plomo sólido es $c = 0{,}031\ cal/g$. Calcular el calor de solidificación.

$$f = \frac{500\ (19{,}70 - 18{,}20)}{50} - 0{,}031\ (327{,}4 - 19{,}70) = 5{,}5\ cal/g.$$

§ 270.— **Fusión pastosa y fusión franca.** — En lo que antecede nos hemos referido a cuerpos que, llegados a la temperatura de fusión, pasan netamente al estado líquido. Este tipo de fusión se llama **fusión franca:** la presentan el azufre, la estearina, el hielo y la mayoría de los cuerpos puros.

Otros cuerpos, como el *vidrio*, la *cera*, etc., por acción del

calor se ablandan, tomando consistencia pastosa, y pasan por una serie de estados intermedios antes de fundir.

En esto consiste la fusión pastosa, la que origina un análogo tipo de solidificación.

Se explica este fenómeno para el vidrio, admitiendo que, en realidad, en vez de un sólido, es *un líquido que a la temperatura ordinaria tiene un coeficiente de viscosidad tan grande que parece un sólido.* Al calentárselo no funde, sino que disminuye su viscosidad gradualmente hasta tomar la apariencia de los demás líquidos. Un hilo de vidrio sometido por un tiempo a una torsión, queda deformado. Este hecho se explica si se admite que el vidrio es un líquido, pues éstos no presentan reacciones elásticas de torsión.

§ 271.— **Influencia de la presión.** — Para comprobar la influencia de la presión en la temperatura de fusión, Lord Kelvin empleó el dispositivo indicado en la fig. 482.

Una mezcla de hielo y agua a 0° se coloca en la parte inferior de un recipiente de paredes de vidrio muy resistentes. Una placa PP de plomo impide que el hielo ascienda en la masa de agua. En las condiciones iniciales el termómetro t marca 0°.

Introduciendo el pistón a tornillo de la parte superior, la presión aumenta, siendo medida por el manómetro M.

Se observa que la temperatura de la mezcla hielo-agua disminuye a medida que aumenta la presión.

Amagat estudió el equilibrio de las fases sólido-líquido, a presiones elevadas. Colocó líquidos en un tubo que mantenía a una temperatura constante t por una circulación de agua y los sometió a presiones crecientes producidas inyectando mercurio con una bomba.

Al llegar a una presión *p*, el líquido se solidifica, siendo t su temperatura de fusión a esa presión.

Posteriormente Tammann y Hulett han realizado numerosas determinaciones.

De acuerdo a todas esas experiencias, puede decirse que los cuerpos puros aumentan su temperatura de fusión al aumentar la presión exterior, en casi todos los casos.

El agua es una excepción, pues su punto de fusión disminuye con el aumento de presión.

Representando en un sistema de ejes cartesianos los puntos cuyas abscisas y ordenadas son, respectivamente, las temperaturas y presiones de equilibrio de las fases sólida v líquida, se tiene la *curva de fusión* de la sustancia estudiada.

Los cuadros que siguen dan algunos resultados de las experiencias de Tammann:

TABLA XXII

PRESIONES Y PUNTO DE FUSIÓN

Benceno		Bismuto		Agua	
p $\frac{kgr}{cm^2}$	t	p $\frac{kgr}{cm^2}$	t	p $\frac{kgr}{cm^2}$	t
1	5°,43	1	269°,2	1	0°
161	10°,12	970	273°	13	— 0°,10
533	20°,13	1990	276°,8	336	— 0°,5
948	30°,05	2420	278°,8	890	— 7°,5
1371	40°,03	2860	279°,8	1155	—10°
1805	50°,03			1625	—15°
2306	60°,00			2042	—20°
2846	69°,99			2200	—22°

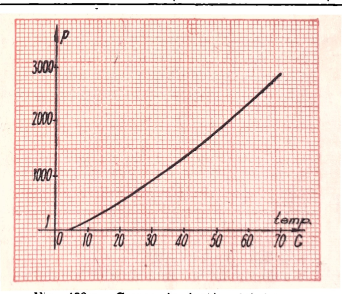


Fig. 483 a.—*Curva de fusión del benceno.*

Las figuras 483 muestran las curvas de fusión correspondientes al benceno y al agua. Las ordenadas son las presiones y las abscisas las temperaturas de fusión correspondientes.

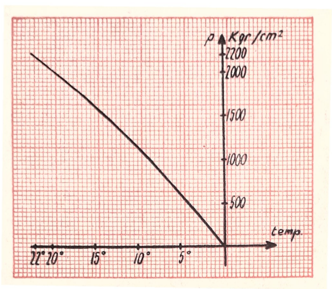


Fig. 483 b.—*Curva de fusión del agua.*

§ 272. — **Rehielo.** — Dos trozos de hielo, comprimidos uno contra el otro, se unen formando un solo bloque.

El hecho se explica por efecto del descenso del punto de fusión al aumentar la presión. Al oprimir los trozos de hielo disminuye el punto de fusión en las partes en contacto; como consecuencia de ello, se produce una fusión parcial acompañada de disminución de la temperatura hasta el valor de equilibrio.

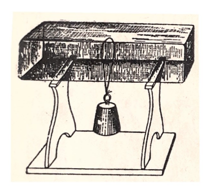


Fig. 484.—*Rehielo.*

Suprimiendo la presión, el agua de fusión se solidifica por estar a menos de 0°, uniendo las partes.

La figura 484 muestra una curiosa experiencia sobre rehielo. El alambre que sostiene la pesa P. presiona sobre el hielo; después de un tiempo atraviesa el bloque de hielo, que queda unido por efecto del rehielo.

§ 273. — **Cambio de volumen en la fusión.** —La fusión produce en los cuerpos un cambio de densidad; por lo general, la fase líquida es menos densa que la sólida en las sustancias puras.

Hay, sin embargo, excepciones: el hielo tiene menos densidad que el agua de fusión, otro tanto pasa con el bismuto y el hierro. Los valores que a continuación se indican dan las diferencias entre los volúmenes específicos de la fase líquida

y la sólida de cada cuerpo. Para el agua, el bismuto y el hierro esa diferencia es negativa.

TABLA XXIII

FUSIÓN - VARIACIÓN DEL VOLUMEN ESPECÍFICO EN $\frac{cm^3}{g}$

Aluminio	+ 0,0190
Bismuto	— 0,0034
Estaño	+ 0,0039
Hierro	— 0,0085
Plomo	+ 0,0034
Fósforo blanco	+ 0,0191
Azufre	+ 0,0287
Zinc	+ 0,0105
Agua	— 0,0830

§ 274. — **Sobrefusión.** — En ciertas condiciones, es posible mantener una sustancia pura, en su fase líquida, por debajo de la temperatura de fusión correspondiente a la presión que soporta.

Se la mantiene así en un estado inestable de equilibrio de fases. La agitación del recipiente o el agregado de una partícula sólida provocan bruscamente la solidificación.

La figura 485 muestra un dispositivo para observar la sobrefusión del agua. Un tubo de vadrio cerrado lleva en su interior un termómetro y una masa de agua pura, hervida y a la presión normal. Enfriándola lentamente y sin mover el aparato, con una mezcla de hielo y sal, se puede llegar a — 10° sin que se solidifique. Agitando el frasco se forma hielo de inmediato y el termómetro sube a 0°.

El fósforo blanco fundido bajo agua presenta *sobrefusión,* quedando líquido a menos de 44°. Agregando un trozo de fósforo sólido termina ese equilibrio inestable.

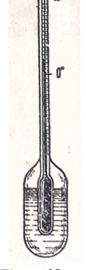


Fig. 485. — *Aparato para sobrefusión.*

Un caso interesante es el siguiente:

El silicato de calcio cristalizado tiene un punto de fusión bien definido: si se enfría lentamente el líquido hasta la temperatura ordinaria su viscosidad aumenta hasta convertirse en un vidrio trasparente e isótropo como un líquido, pero tan duro que raya el hierro.

Calentado, presenta el aspecto de la fusión pastosa, y dejado un tiempo en la llama, cristaliza, desvitrificándose. Los cristales blancos formados tienen fusión franca. Los vidrios parecen ser líquidos en estado de sobrefusión.

§ 275.— **Vaporización. - Vapor saturado. - Tensión de vapor.** — Vamos a estudiar, ante todo, la vaporización de un líquido en el vacío, disponiendo para ello de dos tubos de Torricelli (§ 140) en la forma que indica la figura 486. El desnivel de mercurio será de 76 cm, valor equivalente a la presión atmosférica.

Introduciendo una pequeña masa de líquido en el tubo B con ayuda de una pipeta de extremo curvado, se observa que el líquido se vaporiza de inmediato cuando llega a la cámara barométrica. Al mismo tiempo el nivel del mercurio desciende en el tubo B hasta la altura h. Este hecho acusa la existencia de una presión ejercida por el vapor del líquido sobre el mercurio del tubo B, presión que constituye la **tensión de vapor del líquido.**

Fig. 486.— *Tensión de vapor.*

Su valor es igual al desnivel: $p = 76 - h$ (cm Hg). Agregando nuevas porciones de líquido, el valor de la tensión p aumenta, mientras el líquido se vaporiza totalmente. Pero, llega un momento en que una pequeña cantidad de líquido queda sobre el mercurio en el tubo B (fig. 487). Se dice entonces que el **vapor está saturado.**

Agregando más líquido, éste no se vaporiza, sino que va llenando la cámara del tubo B; entretanto, el desnivel *h'* pemanece constante.

La tensión del vapor p ha alcanzado su valor máximo desde el momento de la saturación.

$$p_s = 76 - h'$$

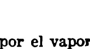


Fig. 487.—*En el tubo B, el vapor está saturado. Su tensión ha alcanzado el valor máximo a esa temperatura.*

Esta tensión máxima es, como se ve, independiente del espacio ocupado por el vapor.

Esto puede comprobarse mejor con el aparato llamado barómetro a cubeta profunda (figura 488 a). Introduciendo el tubo, aumenta la cantidad de líquido, disminuyendo el espacio ocupado por el vapor pero el desnivel que marca la tensión máxima no varía.

Levantando el tubo, puede volverse a vaporizar todo el líquido; entonces la tensión del vapor se hace menor que la máxima (fig. 488 b).

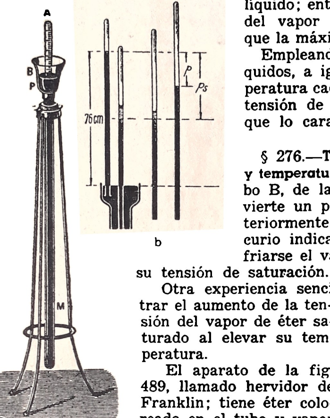


Fig. 488. — *Cubeta profunda para estudiar la tensión de los vapores.*

Empleando diversos líquidos, a igualdad de temperatura cada uno tiene una tensión de vapor saturado que lo caracteriza.

§ 276.—**Tensión de vapor y temperatura.**— Si en el tubo B, de la figura 487, se vierte un poco de éter exteriormente, sube el mercurio indicando que al enfriarse el vapor, disminuyo su tensión de saturación.

Otra experiencia sencilla puede mostrar el aumento de la tensión del vapor de éter saturado al elevar su temperatura.

El aparato de la fig. 489, llamado hervidor de Franklin; tiene éter coloreado en el tubo y vapor de éter saturado en ambas ampollas. Aplicando la mano en una de ellas, aumenta la tensión del vapor por el calor cedido. El desequilibrio de tensiones empuja el líquido y pasa a la otra ampolla pareciendo que hierve.

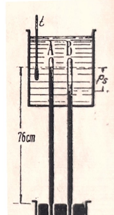


Fig. 490.—*Medida de la tensión de vapor saturado a determinada temperatura.*

Para determinaciones cuantitativas se emplea el dispositivo de la fig. 490. El baño a temperatura t leída en el termómetro, calienta el vapor saturado del tubo B aumentando su presión que se mide por el desnivel p_s.

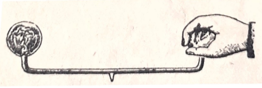


Fig. 489.—*Hervidor de Franklin.*

Haciendo una serie de medidas se puede trazar la curva de vaporización tomando como abscisas las temperaturas y como ordenadas las tensiones de vapor.

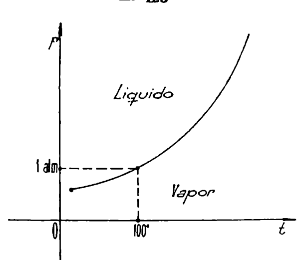


Fig. 491.—*Tensión del vapor de agua saturado en función de la temperatura.*

TABLA XXIV

TENSIÓN DE VAPOR DE AGUA SATURADO

t	p_s mm Hg	p_s $\frac{gr}{cm^2}$	t	p_s m Hg	p_s $\frac{Kgr}{cm^2}$
0°	4,6	6,5	160°	4,65	6,32
20°	17,4	23,7	180°	7,59	10,3
60°	148,9	203	200°	11,69	15,9
80°	354,9	485	250°	29,78	40,5
100°	760	1033	300°	65,44	89,0
120°	1491	2028	350°	127,20	173,0
140°	2718	3695	365°	152,20	207,1

La figura 491 representa esta curva para el vapor de agua, cuyas tensiones de vapor saturado a diversas temperaturas están consignadas en el cuadro adjunto. Para 0° esta tensión es de 4,6 mm de Hg y para 100° es de 760 mm (1 atmósfera).

§ 277. — **Leyes de vaporización en el vacío.** — De acuerdo a los hechos consignados, podemos establecer las tres leyes siguientes:

1°) L o s l í q u i d o s s e v a p o r i z a n e n e l v a c í o , a d q u i r i e n d o t e n s i o n e s c r e c i e n t e s h a s t a q u e e l a m b i e n t e e s t á s a t u r a d o .

2º) A una temperatura dada, la tensión del vapor saturado (tensión máxima) es independiente del volumen que ocupa.

3º) La tensión del vapor saturado crece con la temperatura.

El casó estudiado corresponde al equilibrio de las fases líquida y gaseosa del agua; la curva de vaporización, es la curva de equilibrio.

§ 278. — **Principio de Watt o de la pared fría.** — Dos cámaras A y B comunicadas por su parte supérior contienen un líquido acompañado de su vapor (fig. 492) a diferentes temperaturas. Si $t_1 > t_2$, la tensión p_1 será mayor que la p_2. Esta diferencia de tensiones hará pasar el líquido de A hacia B, produciéndose la destilación hasta que en A sólo hay vapor.

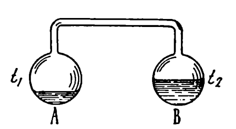
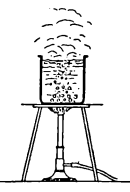


Fig. 492.—*Principio de Watt o de la pared fría.*

En el estado de equilibrio final la tensión del vapor en el recipiente será la que corresponde a la temperatura más baja.

La tensión de equilibrio será, pues, p_2, aunque A continúe a la temperatura t_1. Esta propiedad se llama principio de Watt o de la pared fría.

§ 279. — **Ebullición.** — Cuando se calienta un líquido en el aire, su tensión de vapor saturado aumenta.


Fig. 493. — *Líquido en ebullición.*

En el instante en que dicha tensión se hace igual a la presión que soporta el líquido, entra en *ebullición.*

El fenómeno consiste en una evaporación efectuada simultáneamente en la superficie libre y en el seno del líquido donde se forman burbujas que ascienden agitando la masa.

El líquido entra así en un estado particular de agitación desprendiendo vapores en forma visible y así sigue hasta que se vaporiza totalmente.

El agua *hierve* bajo la presión atmosférica a **100°. A esa temperatura su tensión de vapor saturado es igual a la presión exterior.**

TABLA XXV

TEMPERATURAS DE EBULLICIÓN (a la presión de 760 mm de Hg)	
Azufre	+ 444°.5
Aluminio	+ 1800°
Bismuto	+ 1440°
Cobre	+ 2300°
Cloro	— 37°,6
Fósforo	+ 287°
Estaño	+ 2220°
Hierro	+ 2450°
Hidrógeno	— 252°,8
Helio	— 269°
Iodo	+ 184°,3
Mercurio	+ 357°
Oxígeno	— 183°
Plata	+ 1955°
Benceno	+ 80°
Tolueno	+ 109°,2
Sulfuro de Carbono	+ 46°,3
Alcohol etílico	+ 78°,3
Eter sulfúrico	+ 34°,6

En rigor, la ebullición franca se produce cuando la tensión del vapor saturado supera en un pequeño valor a la presión exterior, pero el valor límite es el de $p_s = H$.

La existencia de aire u otro gas disuelto en el líquido y que pueda formar burbujas en su seno facilita la producción del fenómeno.

La falta de gases en la masa del líquido retarda la ebullición y hace irregular la formación de burbujas de vapor en el interior. Basta colocar con un tubito unas burbujas de aire en el seno del líquido sobrecalentado para provocar la ebullición franca.

§ 280. — **Leyes de la ebullición.** — Pueden verificarse las siguientes leyes experimentales:

1º) A una presión constante dada, cada líquido hierve a una temperatura determinada que se llama su **punto de ebullición.**

2º) La temperatura del vapor desprendido permanece constante durante la ebullición.

3º) La ebullición se inicia cuando

la tensión de saturación del vapor del líquido es igual a la presión que soporta.

§ 281.—**Calor de vaporización.**—La cantidad de calor λ que hay que entregar a 1 gramo de líquido a t° para hacerlo pasar al estado de vapor saturado a la misma temperatura se llama calor de vaporización a la temperatura t.

Como el volumen específico del vapor saturado es mayor que el del líquido, una parte de ese calor se emplea en realizar trabajo exterior (λ_e) y la restante queda en el vapor en forma de energía molecular (λ_i).

Podremos separar, por tanto, el valor λ en otros dos:

$$\lambda = \lambda_i + \lambda_e$$

siendo λ_i el calor interno del vapor y λ_e el equivalente al trabajo exterior. Este valor es fácil de calcular; si es V el volumen específico del vapor y σ el del líquido, la variación de volumen es $V - \sigma$, y siendo la presión exterior igual a la tensión del vapor saturado, el trabajo, igual al producto de la presión por la variación de volumen será:

$$L = p_s (V - \sigma)$$

que equivale a la cantidad de calor:

$$\lambda_e = \frac{1}{J} p_s (V - \sigma)$$

en que J es el equivalente mecánico del calor.

Se llama **calor total de vaporización** a la temperatura t, a la cantidad de calor necesaria para transformar un gramo de líquido a cero grado en vapor saturado a la temperatura t.

Está formado por la suma del calor de vaporización λ más el calor del líquido: $q = ct$ (pues $m = 1$) luego el calor total r es:

$$r = q + \lambda$$

Resumiendo

$$r = q + \lambda = q + \lambda_i + \lambda_e$$

de donde

$$\underset{\text{calor total}}{r} = \underset{\text{calor del líquido}}{ct} + \underset{\text{calor interno}}{\lambda_i} + \underset{\text{calor externo}}{\frac{1}{J} p_s (V - \sigma)}$$

Ejemplo:

Para el agua a 100° se determina $\lambda = 539{,}1 \frac{cal}{g}$.

como $V = 1670{,}2 \frac{cm^3}{g}$; $\sigma = 1 \frac{cm^3}{g}$; $p_s = 1{,}033 \frac{kgr}{cm^2}$ y $J = 42{,}7 \frac{kgr\ cm}{cal}$

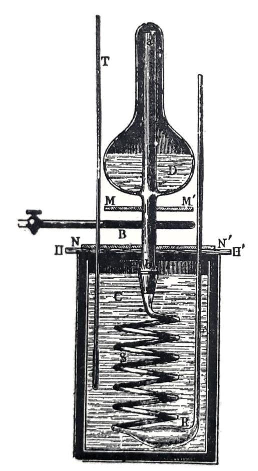


Fig. 494.—Calorímetro de Berthelot para calor de vaporización.

resulta:

$$\lambda_e = \frac{1}{42{,}7} 1{,}033 \times 1669{,}2 = 40{,}4$$

El calor interno será:

$$\lambda_i = \lambda - \lambda_e = 498{,}7 \text{ cal/g}$$

y el calor total

$$r = \lambda + c \cdot t = 539{,}1 + 1 \times 100$$

$$r = 639{,}1 \frac{cal}{g}$$

§ 282.— **Determinación del calor de vaporización.** — El calor de vaporización se mide con un calorímetro de mezclas en el cual se coloca un serpentín al que se hace llegar una corriente de vapor.

Un tipo corriente es el de Berthelot (fig. 494). El recipiente D en la parte superior lleva el líquido a evaporar, que se calienta directamente con el mechero *B* interponiendo la malla metálica *M M*. El vapor pasa al

serpentín por el tubo *ab* y se condensa en él cediendo calor al calorímetro. La cantidad total *m* del vapor condensado se determina por la diferencia de pesadas del serpentín antes y después de la experiencia.

Si es M la masa del agua del calorímetro (incluído el equivalente en agua del serpentín y el vaso) y t_i, t_f las temperaturas inicial y final, el calor recibido por el calorímetro será:

$$Q = M\ (t_f - t_i)$$

Este calor ha sido entregado por el vapor en un doble proceso: primero al transformarse en líquido a la temperatura T de ebullición, y luego, al enfriarse ese líquido desde la temperatura T hasta la temperatura final t_f. Si es c el calor específico del líquido y m la masa de vapor condensado, será:

$$Q = m\lambda + mc\ (T - t_f)$$

Igualando este calor con el que recibió el calorímetro

$$M\ (t_f - t_i) = m\lambda + mc\ (T - t_f)$$

de donde resulta:

$$\lambda = \frac{M\ (t_f - t_i)}{m} - c\ (T - t_f)$$

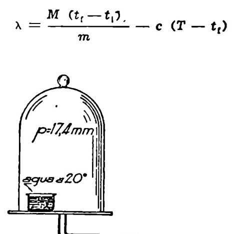


Fig. 495.—*El agua hierve a diversas temperaturas bajo la campana de la máquina neumática.*

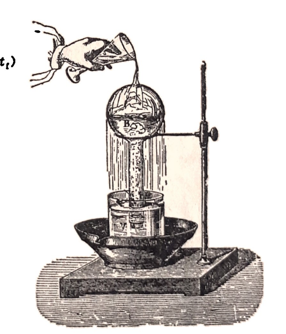


Fig. 496. — *Ebullición provocada por disminución de la presión.*

así se obtiene el calor de vaporización.

§ 283.—**Ebullición del agua a temperaturas diferentes de**

100°. — La curva de vaporización (§ 276) permite determinar **la temperatura de ebullición** del líquido para una presión dada, y, también, hallar la presión a que puede hacerse hervir un líquido que está a determinada temperatura.

El agua a 20° de temperatura (fig. 495) hierve bajo la campana de la máquina neumática cuando la presión interna es de 17,4 mm de mercurio, pues ésta es la tensión del vapor de agua saturado a 20° centigrados (ver tabla XXIV).

Una experiencia clásica para provocar la ebullición del agua a baja temperatura es la de Franklin.

En un balón se hace hervir agua y en un momento dado se lo tapa e invierte colocándolo en un soporte, como indica la fig. 496. Mojando con agua fría la parte superior del balón, el vapor se condensa disminuyendo la presión.

Fig. 497. — *Hipsómetro.*

Llega un momento en que el líquido hierve, renovándose la agitación cada vez que se vierte agua fría sobre el balón.

El hipsómetro de *Regnault* (figura 497) permite medir las temperaturas de ebullición a diversas alturas, comprobándose que cuando decrece la presión atmosférica, disminuye dicha temperatura. Los habitantes de lugares muy altos deben cocinar sus verduras en autoclaves o pequeñas marmitas.

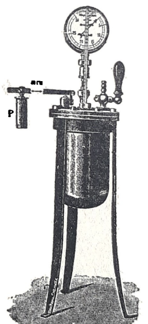


Fig. 498.—*Marmita de Papin.*

§ 284. — **Marmita de Papin.** — Colocando agua en un recipiente cerrado se la puede tener sin hervir a temperaturas superiores a 100°.

La *marmita de Papin* (fig. 498) es un recipiente de paredes resistentes con una tapa superior asegurada por un fuerte

dispositivo a tornillo, en cuyo interior se coloca agua.

Una válvula de seguridad, formada por una pequeña tapa oprimida por una palanca sobre la que corre la pesa P, permite graduar la presión máxima.

Siendo s la sección y p la presión del vapor, el momento de la fuerza $p.s$ debe equilibrar al momento de P. Corriendo esta pesa se gradúa el valor de la presión p que abre la válvula.

Además, hay un manómetro metálico y un tubo para colocar el termómetro.

Calentando el agua aumentan los valores indicados por el manómetro y el termómetro correspondiendo a los valores de equilibrio de la curva de vaporización C.

Una aplicación de la marmita es la *autoclave* empleada para esterilizar objetos al vapor.

§ 285. — **Vaporización en el aire (evaporación).** — La vaporización en el aire, lo mismo que en otros gases, constituye una difusión de las moléculas del líquido en el gas.

Se produce lentamente; tanto más cuanto mayor es la presión que soporta el líquido.

La tensión de saturación del vapor es la misma, tanto que se vaporice en un gas como en el vacío, cosa que puede probarse con un tubo de Torricelli en el que se deja un poco de gas. Dentro del tubo, la presión total es igual a la suma de la presión del gas más la tensión del vapor.

La velocidad de evaporación en la atmósfera puede expresarse por la fórmula:

$$m = KS \frac{p_s - p'}{H}$$

donde m es la masa evaporada por unidad de tiempo, S la superficie del líquido, H la presión barométrica, p_s la tensión de saturación del líquido a la temperatura a que se encuentra, p la tensión del vapor del líquido en el aire, y K un coeficiente que depende de las unidades empleadas y del estado de agitación de la atmósfera.

Cuando $p = p_s$, el ambiente está saturado y cesa la evaporación.

§ 286. — **Estado higrométrico.** — En el aire existe vapor de agua en cantidad variable, según los instantes. Una superficie enfriada se empaña y hasta se recubre de una capa de rocío.

Hay días en que este rocío aparece en los muros, vidrios y diversos objetos; entonces la atmósfera está saturada de *vapor de agua.*

El estado higrométrico es la relación entre la masa

m de vapor que hay en un metro cúbico de atmósfera y la masa m_s que habría si estuviera saturado a la misma temperatura. Se lo llama también *humedad relativa.*

$$E = \frac{m}{m_s}$$

Puede demostrarse que esta relación es igual a la que existe entre la tensión p del vapor de agua en el aire y la tensión máxima p_s que tendría si estuviese saturado a la temperatura del ambiente.

$$E = \frac{p}{p_s}$$

Prueba. — Aplicamos al vapor de agua la ecuación de estado

$$p\,V = m\ C\ T$$

y siendo $V = 1\ m^3$

$$p = m\ C\ T$$

Para el estado de saturación a igual temperatura

$$p_s = m_s\ C\ T$$

y dividiendo ordenadamente:

$$\frac{p}{p_s} = \frac{m}{m_s} = E$$

El estado higrométrico es menor que 1, salvo el caso de saturación en que $p = p_s$, apareciendo el rocío.

§ 287. — **Higrómetros de condensación.** — Se fundan en el siguiente principio: enfriando suficientemente una placa metálica o de vidrio, llega un momento en que la tensión p existente en el aire es igual a la de saturación a la temperatura de la placa.

Cuando eso sucede la placa se empaña por condensación del vapor, que a su temperatura está saturado.

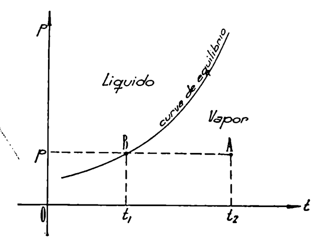


Fig. 499.—

Tomando la temperatura t_1 a que aparece el rocío, y la del ambiente t_2, se buscan en las tablas

las tensiones de vapor de agua saturado que les corresponden.

En el gráfico de vaporización la evolución hecha (enfriamiento a presión constante p) equivale a hacer recorrer al estado del vapor la recta AB hasta llegar al punto B. Entonces está saturado y tiene temperatura t_1 (fig. 499).

§ 288. — **Higrómetro de Daniell.** — Consta de un tubo de vidrio doblado en U con dos ampollas en las ramas verticales y con éter sulfúrico en su interior (fig. 500).

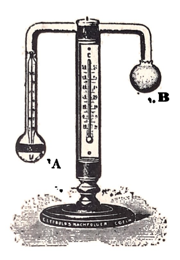


Fig. 500.—*Higrómetro de Daniell.*

La rama vertical más larga tiene un termómetro que da la temperatura del éter líquido y de la pared de la ampolla A, que lleva un anillo de espejo metálico para observar el empañamiento.

Para enfriar esta ampolla y provocar el empañamiento cuando alcance la temperatura t_1, se vierte éter en la ampolla B.

Al evaporarse el éter la temperatura de B baja, produciéndose una condensación en su interior.

Como consecuencia de esto, el éter de A destila hacia B.

La temperatura en A baja, siendo indicada por el termómetro respectivo; observando cuando se empaña el espejo metálico se tiene t_1.

La temperatura del ambiente t_2 se lee en el termómetro del soporte del aparato.

De una tabla se sacan p y p_s calculándose E.

TABLA XXVI

t	p_s	t	p_s	t	p_s	t	p_s
—5°	3,11	6°	7,00	17°	14,42	28°	28,10
—4°	3,37	7°	7,49	18°	15,36	29°	29,78
—3°	3,64	8°	8,02	19°	16,35	30°	31,55
—2°	3,94	9°	8,57	20°	17,40	31°	33,41
—1°	4,26	10°	9,17	21°	18,49	32°	35,36
0°	4,60	11°	9,79	22°	19,66	33°	37,41
1°	4,94	12°	10,46	23°	20,89	34°	39,57
2°	5,30	13°	11,16	24°	22,18	35°	41,83
3°	5,69	14°	11,91	25°	23,55	36°	44,40
4°	6,10	15°	12,70	26°	24,99	37°	46,90
5°	6,53	16°	13,51	27°	26,51	38°	49,50

§ 289. — **Higrómetro de Alluard.** — Este aparato (fig. 501) tiene una placa plateada o dorada A, que forma parte de un recipiente en el que se ha colocado éter. El éter es evaporado con ayuda de una corriente de aire producida con una pera de goma de pulverizador. El punto de rocío se determina por comparación con una placa igual, B, que la rodea.

Es más cómodo y más preciso que el anterior.

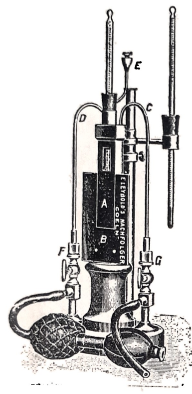


Fig. 501.—*Higrómetro de Alluard.*

Ejemplo.—Se ha determinado:

Temperatura ambiente $t = 22°$

Punto de rocío $t_1 = 18°$

De las tablas: $p_s = 19{,}66$ mm

$p = 15{,}36$ mm

Resulta:

$$E = \frac{15{,}36}{19{,}66} = 0{,}78 = 78\ \%$$

§ 290. — **Higrómetro de cabello.** — Para observaciones aproximadas se utiliza el higrómetro de cabello, que se basa en las variaciones de longitud que experimenta un cabello bien desengrasado, con las variaciones de humedad. Se construye su escala por comparación con los anteriores.

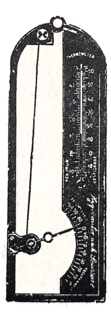


Fig. 502. — *Higrómetro de cabello.*

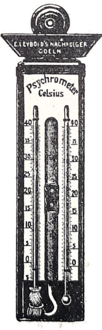


Fig. 503.— *Psicrómetro.*

§ 291.— **Psicrómetro.** — Un método muy utilizado para determinar estados higrométricos es el del psicrómetro que consta de dos termómetros. Uno de ellos da directamente la temperatura ambiente. El otro lleva el bulbo envuelto en un paño humedecido.

El agua del paño se evapora con mayor o menor velocidad, según la humedad del ambiente (§ 285).

Si el ambiente está saturado, no hay evaporación y ambos termómetros indican igual temperatura. A medida que disminuye la humedad del ambiente, aumenta la velocidad de evaporación, y, por lo tanto, disminuye la temperatura indicada por el termómetro húmedo. En tablas especiales se determina el estado higrométrico, en base a la temperatura ambiente t y a la diferencia de temperatura en ambos termómetros ($t - t_1$).

TABLA XXVII

Determinaciones de E con el psicrómetro

Valores de la humedad relativa para la presión de 760 mm de mercurio (1).

t°	Diferencias $t° - t°_1$																
	0°,5	1°	1°,5	2°	2°,5	3°	3°,5	4°	4°,5	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
3°	92	84	76	69	62	54	45	40	32	25	12	—	—	—	—	—	—
6°	94	87	80	73	66	60	54	47	41	35	23	11	—	—	—	—	—
9°	94	88	82	76	70	65	59	53	48	42	32	22	12	3	—	—	—
12°	94	89	84	78	73	68	63	58	53	48	38	30	21	12	4	—	—
15°	95	90	85	80	76	71	66	62	58	53	44	36	28	20	13	4	—
18°	95	90	86	82	78	73	69	65	61	57	49	42	35	27	20	13	6
21°	96	91	87	83	79	75	71	67	64	60	53	46	39	32	26	19	13
24°	96	92	88	85	81	77	74	70	66	63	55	49	43	37	31	26	21
27°	96	93	90	86	82	79	76	72	68	65	59	53	47	41	36	31	26
30°	96	93	90	86	82	79	76	73	70	67	61	55	50	44	39	35	30
33°	96	93	90	86	83	80	77	74	71	68	63	57	52	47	42	37	33
36°	97	93	90	87	84	81	78	75	72	70	64	59	54	50	45	41	36
39°	97	94	91	88	85	82	79	76	74	71	66	61	56	52	47	42	39

El termómetro húmedo se supone ventilado en una corriente de aire de velocidad $3 \frac{m}{seg}$

Ejemplo de aplicación.—Se han leído $t = 21°$; $t_1 = 19°,5$

Se tiene: $t - t_1 = 1°,5$

(1) Tomada de la "Smithsonian Physical Tables" (tabla 214).

La humedad relativa dada en la tabla es: 87 % y el valor del estado higrométrico buscado: $E = 0{,}87$. Para temperaturas intermedias, se interpola, si hay necesidad, por una proporción simple y directa.

§ 292.— **Sistema sólido - vapor - Volatilización y sublimación.** — Numerosos cuerpos sólidos presentan la particularidad de que, calentados, sin llegar a la temperatura de fusión, se vaporizan, pasando directamente del estado sólido al gaseoso. Este cambio es la **volatilización.**

En general, los vapores producidos, al encontrar una pared fría se condensan en cristales sólidos, pasando directamente de la fase gaseosa a la sólida. Este cambio de estado se llama *sublimación.*

En el laboratorio de química y en la industria se emplea la sublimación como un método para purificar numerosas sustancias.

La fig. 504 muestra un clásico dispositivo para extraer el ácido benzoico del benjuí.

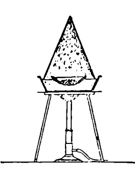


Fig. 504.—*Obtención del ácido benzoico por sublimación.*

El ácido benzoico se *volatiliza* al calentar el benjuí en el recipiente de hierro y luego se deposita por *sublimación* en forma de *cristales* puros en el interior del cono de papel.

Muchos sólidos dan vapores a cualquier temperatura: la percepción de olores de muchos cuerpos sólidos se explica por su volatilización.

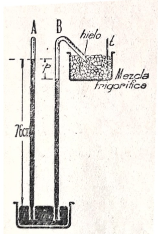


Fig. 505.—*Medida de la tensión de vapor del hielo.*

El sistema sólido-vapor tiene condiciones de equilibrio de fases análogas al sistema líquido-vapor.

Para cada temperatura, hay una tensión de vapor saturado, y puede trazarse la respectiva curva de sublimación.

Regnault estudió las tensiones de vapor del hielo con el dispositivo de la figura 505.

El tubo A es un tubo de Torricelli que mide la presión atmosférica.

El tubo B, con el extremo doblado sumergido en una mezcla frigorífica, contiene agua que destila y se solidifica formando hielo.

La tensión $p = (760 - h)$, mide la tensión de vapor del hielo, o sea la tensión de volatilización. Los valores que

siguen corresponden a las medidas de Juhlin y a ellos se refiere el gráfico de la figura 506.

t	p
0°	4,602 mm
— 10°	1,999 „
— 20°	0,806 „
— 50°	0,050 „

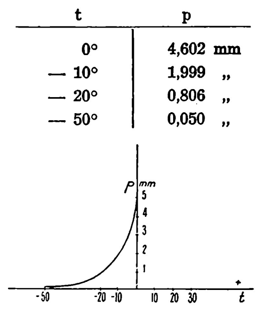


Fig. 506.—*Tensión del vapor de hielo en función de la temperatura.*

Existe un **calor de volatilización**, que es el número de calorías necesarias para volatilizar un gramo de sustancia; se integra por la suma del *calor latente de volatilización* y el *calor externo* (empleado en ejecutar trabajo exterior).

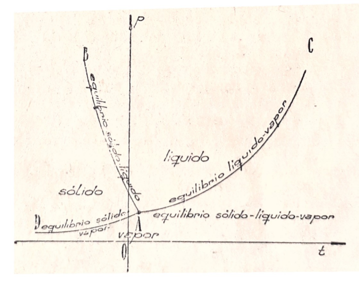


Fig. 507.—*Curvas de equilibrio sólido-líquido-vapor y punto triple.*

§ 293.—**Punto triple.**—Trazando las curvas de fusión, de vaporización y de sublimación de una sustancia pura, las tres tienen un punto común, llamado **punto triple**. La figura representa las 3 curvas de equilibrio de 2 fases para el agua.

El punto A es

el punto triple; su posición corresponde a los valores:

$$p = 4{,}6005 \text{ mm}$$

$$t = 0^{\circ}{,}008$$

Para valores de p y t que correspondan a puntos de las curvas AB, AC ó AD, el agua puede estar en equilibrio en dos fases.

Para los valores de p y t correspondientes al punto triple A, pueden estar sus tres fases en equilibrio: sólida, líquida y gaseosa.

Para la temperatura 0°,008, la tensión de vapor del agua y la del hielo son iguales a 4,6005 mm de mercurio y puede así tenerse hielo, agua y vapor en equilibrio.

No hay más que estos valores que permitan ese equilibrio; por eso se dice que el sistema de las 3 fases en equilibrio es un **sistema invariante.**

Para presiones y temperaturas arbitrariamente tomadas, en general se tendrán puntos representativos situados entre las curvas, pudiendo caer en la zona del sólido, del líquido o del vapor. Se tendrá el agua en *equilibrio de una sola fase.*

Como se fija por dos parámetros elegidos libremente, se dice que es un **sistema bivariante.**

§ 294.— **Transformaciones alotrópicas y polimorfas (sistema sólido-sólido).**— Las transformaciones entre dos fases sólidas de la misma sustancia pura se llaman transformaciones polimorfas.

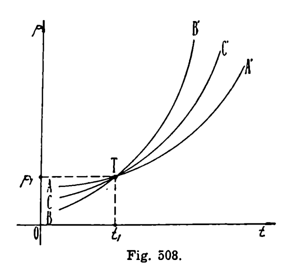


Fig. 508.

Cuando la sustancia pura es un cuerpo simple se las denomina también **alotrópicas.**

Es indispensable establecer que las dos fases sólidas difieren solamente por sus propiedades físicas, pero dan el mismo líquido al fundir y vapores idénticos por *volatilización.*

Las transformaciones polimorfas se clasifican en dos grupos: a) cuando se pasa de una fase a otra por

transformación a temperatura constante y bajo la presión atmosférica, se llaman *enantiotropas.* b) Cuando una sola de ellas es estable bajo la presión atmosférica y la otra se obtiene por sobrefusión o sobresaturación, se llaman *monotropas.*

Se representan en el diagrama de la figura 508 con la línea AA' la curva de fusión de una de las fases, con la BB' la correspondiente a la fusión de la segunda fase, y con CC' la curva de transformación.

El punto T representa un punto triple; a la presión p_1 y temperatura t_1 pueden estar en equilibrio las dos fases sólidas y su líquido de fusión. Trazando las curvas de volatilización de las fases sólidas se determinan otros dos puntos triples de equilibrio para vapor, líquido y sólido.

Analicemos el caso del azufre, cuerpo que tiene dos formas alotrópicas bien definidas: el *azufre octaédrico* (cristaliza en octaedros ortorrómbicos y funde a 113°,5) y el *azufre prismático* (cristaliza en prismas del sistema monoclínico que funde de 119°,5 a la presión normal).

Por debajo de 95°,6 la forma octaédrica es estable; a mayor temperatura lo es la prismática, pero ambas pueden aparecer a cualquier temperatura como formas de equilibrio inestable (fase metaestable).

La transformación se hace bajo la presión atmosférica y es reversible; por tanto, es *enantiotropa.*

Como todo cambio de estado, tiene su calor de transformación: vale 2,7 $\frac{\text{calorías}}{\text{gramos}}$ a la presión atmosférica normal.

La transformación de fósforo blanco en rojo, en el vacío y a temperatura elevada es *monotropa.*



Fig. 509.—*Flores de hielo ordinario (A.).*

Citaremos como cuerpos polimorfos:

I. *Simples.* — Antimonio, arsénico, carbono, estaño, hierro, fósforo, selenio y azufre.

II. *Compuestos.* — Carbonato de calcio (calcita,

aragonita), ioduro de plata, sulfuro mercúrico, nitrato de plata, sulfato de potasio, ácido acético, hidroquinona, fenol, y muchos otros, entre los que se cuenta el agua.

Según Tammann, además del hielo ordinario que cristaliza en sistema romboédrico o exagonal (hielo A), existen otras dos variedades.

Elevando la presión a 2350 megabarias se tiene a — 80° el hielo *B* y entre — 30° y — 60° el hielo *C*.

Ambas formas se diferencian por la *contracción* que sufre al transformarse el hielo A y por el *aumento de volumen al fundir*.

Por proyección de un haz luminoso a través de una lámina de hielo, se obtienen las imágenes de flores de hielo (cristales) reproducidas en la figura 509.

CAPITULO XXIV

CONTINUIDAD DE LOS ESTADOS LÍQUIDO Y GASEOSO FENÓMENOS CRÍTICOS - VAPORES Y GASES LIQUEFACCIÓN DE GASES

§ 295. — **Continuidad de los estados líquido y gaseoso.** — Se ha visto, en el estudio de la vaporización, que, si se comprime un vapor a temperatura constante, el volumen disminuye hasta que se convierte en vapor saturado. Si continuamos comprimiendo, comienza a licuarse, de modo que tendremos vapor y líquido, hasta que se licúa totalmente, y sólo tendremos líquido cuyo volumen varía muy poco con la presión. La curva ABCD representa este proceso (fig. 510) [1].

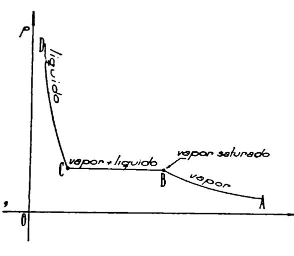


Fig. 510.

Si con el mismo vapor realizamos sucesivamente esta experiencia a temperaturas cada vez mayores, observaremos que los puntos *B* y *C* se encuentran cada vez más próximos, o sea que el volumen ocupado por toda la masa en estado de vapor saturado disminuye con la temperatura, mientras crece el de la masa en estado líquido a la misma temperatura.

Si continuamos aumentando la temperatura llegará a un valor para el cual el líquido y el vapor saturado ocupan igual volumen, o sea, tienen la *misma densidad*. Esta temperatura se

(1) Los trozos AB y CD corresponden a la ecuación de Van der Waals $\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(v-b) = RT$, llamada *ecuación de estado de los lúidos reales*, en la que *a* y *b* son constantes propias de cada sustancia.

llama **temperatura crítica** (T_k). El punto *K* (fig. 511) en el cual se verifica la transformación se denomina **punto crítico**; la presión y volumen correspondientes son la **presión crítica** y el **volumen crítico.** A esta temperatura el calor de vaporización del líquido es *nulo.*

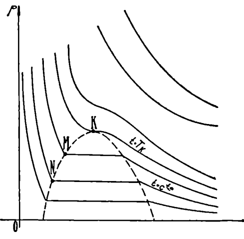


Fig. 511.

A toda otra temperatura superior a la crítica el vapor no se licúa por mucho que se comprima, y entra en la categoría de **gas.**

De acuerdo con esto, llamaremos temperatura crítica a la temperatura por encima de la cual no es posible licuar el gas por simple compresión.

Las curvas de la fig. 511 se conocen como *isotermas de Andrews,* que fué quien primero las determinó.

Estas experiencias nos dicen que es posible pasar en forma continua de la sustancia en estado de vapor al estado líquido sin que se produzca la discontinuidad que supone la condensación. Para ello bastará calentar hasta la temperatura crítica, comprimir hasta alcanzar el punto *K* y luego enfriar siguiendo la curva KMN que corresponde al estado líquido.

Los puntos críticos de algunas sustancias son los siguientes:

Sustancia	T_k	Presión crítica atm.	Volumen crítico dm³/kgr
Agua	+ 374°	225	3,1
Anhídrido carbónico	+ 31°,4	75	2,15
Amoníaco	+ 132°	116	—
Hidrógeno	— 241°	13	32
Helio	— 267°,8	3	2,32
Oxígeno	— 119°	52	—
Nitrógeno	— 145°	35	3,2

§ 296. — **Vapores y gases.** — Los fenómenos críticos nos permiten diferenciar entonces los gases y los vapores. A temperaturas menores que la temperatura crítica tendremos vapores. Más allá del punto crítico tenemos gases que no podrán licuarse por compresión isoterma.

Se comprueba que al alejarse del punto crítico, el gas se acerca cada vez más a las condiciones de gas ideal, es decir, cumple más rigurosamente las leyes de Boyle-Mariotte y de Gay-Lussac.

§ 297. — **Liquefacción de gases.** — De lo dicho se desprende que todo gas puede licuarse con tal de que se lo enfríe por debajo de su punto crítico. En la actualidad se ha conseguido licuar todos los gases, incluso el helio, que se creyó fuera un gas permanente.

Hasta 1877 se llamaban *gases permanentes* al N^2, O^2, H^2, CH^4 (metano), CO (óxido de carbono) y NO_2 (bióxido de nitrógeno).

En ese año, Cailletet y Pictet licuaron algunos de esos gases con un aparato en el cual podían alcanzar presiones hasta de 1 000 atmósferas.

El gas comprimido, se enfriaba y licuaba al disminuir bruscamente la presión. Así licuaron el anhídrido carbónico a temperatura ordinaria, el que en realidad es un vapor, pues su temperatura crítica es 31°,5.

Consiguieron licuar hasta oxígeno, cuya temperatura crítica es — 119° con un aparato formado por 3 refrigerantes "en cascada" (figura 512). En el primero, evaporando anhídrido sulfuroso se enfría a — 70° y con él se enfría anhídrido carbónico líquido que, evaporado por aspiración, se enfría hasta -130°. Este CO_2 se utiliza para enfriar oxígeno fuertemente comprimido que entonces se licúa a 20 atmósferas.

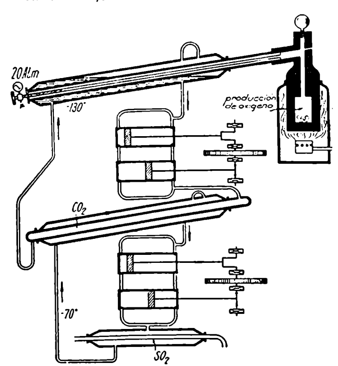


Fig. 512.—*Instalación en cascada para licuar gases.*

Posteriormente, Linde construyó una máquina en que se enfriaba el gas por aplicación del efecto Joule-Thomson.

Se conoce con ese nombre el efecto por el cual todos los gases se enfrían al dejarlos expandir bruscamente sin realizar trabajo exterior. El único que se calentaba en esas condiciones era el hidrógeno, pero se comprobó que por debajo de — 80°,5 también se enfría.

La máquina de Linde consta de un compresor, donde se comprime el gas. Se deja luego expandir, con lo cual su temperatura disminuye y el gas así frío se utiliza para enfriar el nuevo gas que se comprime, que al expandirse se enfriará más, y así sucesivamente. Las cañerías concéntricas permiten realizar este proceso. Se obtiene así industrialmente el aire líquido.

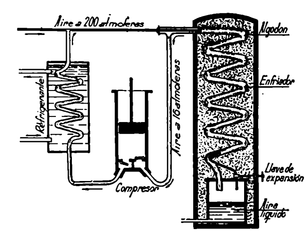


Fig. 513.—*Aparato de Linde para liquefacción de gases.*

Una especie de destilación fraccionada permite obtener nitrógeno y oxígeno a partir del aire líquido.

El hidrógeno, cuyo punto crítico está próximo a — 240°, se licúa, enfriándolo primero a — 205° en aire líquido en ebullición y utilizando luego un aparato de funcionamiento semejante al de Linde. En contacto con hidrógeno líquido el aire líquido se solidifica y el hidrógeno se enfría y solidifica a — 259° dejándolo hervir.

Con hidrógeno sólido se enfría el helio, cuyo punto crítico es aproximadamente — 268° (5° absolutos) y por expansión brusca se lo licúa.

Temperaturas más bajas se han obtenido en el famoso laboratorio de Kamerlingh Onnes, en Leyden, aprovechando la propiedad de ciertas sustancias de absorber calor al suprimir bruscamente el campo magnético en que se hallan colocadas. Actualmente se ha alcanzado menos de un grado absoluto.

Todos esos gases licuados presentan un aspecto semejante: son transparentes, poco viscosos y de coloración ligeramente azulada. Sus puntos de ebullición se toman como puntos fijos a baja temperatura.

En la tabla siguiente consignamos algunos datos interesantes:

TABLA XXVIII

Gas	Densidad	Punto de ebullición	Calor de vaporización
Aire	0,8—1,2	— 181,4° a — 195,7	50 cal a — 190°
Oxígeno	1,2	— 182,987°	
Argón	—	— 185,66°	
CO	—	— 191,47°	
Nitrógeno	0,8	— 195,98°	
Neón	—	— 245,92°	
Hidrógeno	0,08	— 252,75°	
Helio	0,15	— 268,88°	

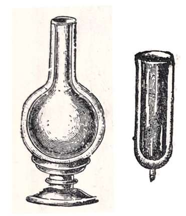


Fig. 514.—*Vaso de Dewar para gases líquidos.*

Con estos líquidos se opera en recipientes de doble pared, entre las cuales se ha hecho el vacío (vaso Dewar, análogo a los "termos" corrientemente usados) (fig. 514).

§ 298.—**Hielo seco.**— Un gas que se está utilizando en gran escala en estado sólido es el anhídrido carbónico, que se emplea para reemplazar el hielo. Se obtiene fácilmente en el laboratorio inclinando un tubo de anhídrido carbónico comprimido de modo que quede con el pico de salida más bajo que el resto del tubo. Abriendo el robinete, como a temperatura ordinaria y a la presión en que está en el tubo, una buena parte se encuentra en estado líquido, sale un chorro que, por la expansión y evaporación brusca, se enfría fuertemente y se solidifica, recogiéndolo en un paño que envuelve el pico de salida (fig. 515).

En la obtención industrial se aplica un procedimiento basado en el mismo principio, pero en tal forma que el vapor no solidificado, vuelve al compresor y repite el proceso.

Su punto de sublimación es de — 78°,5 C y tiene la ventaja, con respecto al hielo, de no dejar residuo ni humedad. Su densidad es 1,56 y su calor de vola-

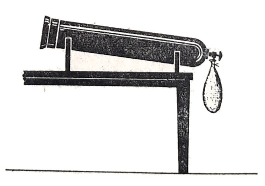


Fig. 515.—*Obtención de hielo seco.*

tilización es de 137 calorías, necesitando en total 152 calorías por gramo para llegar a 0° C. Se observa que el rendimiento por unidad de peso es muy parecido al del hielo común.

§ 299. — **Máquinas frigoríficas.** — Una aplicación importante del calor que absorbe un líquido al evaporarse es la de las máquinas frigoríficas, cuyo principio de funcionamiento analizaremos en la figura 516.

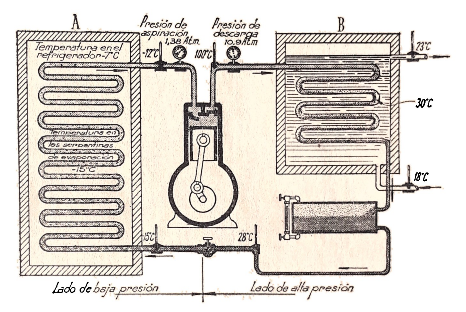


Fig. 516.—*Esquema de máquina frigorífica.*

Un circuito cerrado lleno de amoníaco, anhídrido sulfuroso u otra sustancia apropiada, está constituído por dos serpentines y un compresor.

En uno de los serpentines A se evapora el líquido, por la succión del compresor, absorbiendo calor. En el otro (B) se condensa y abandona calor al salir del compresor. El primero constituye el refrigerante y el otro el condensador.

El condensador se enfría por circulación de aire o agua, según la capacidad de la instalación.

Las presiones y temperaturas indicadas en la figura, dan idea de la marcha del fenómeno.

CAPÍTULO XXV

DIFUSIÓN - ÓSMOSIS - PRESIÓN OSMÓTICA

§ 300.—**Difusión.** — Se llaman fenómenos de difusión aquellos en que se produce la penetración de unas sustancias en otras. Se trata de fenómenos de naturaleza molecular y los casos más corrientes son los de difusión de líquido en líquido, gas en gas, gas en líquido y gas o líquido en sólido. Se admite que en algunos casos ha llegado a producirse difusión de sólido en sólido (oro en plomo).

En algunos casos en que una pared porosa separa gases, se produce difusión de uno de ellos hacia la pared, que el gas atraviesa y sale hacia el otro lado; entonces el fenómeno se llama *efusión*.

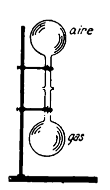


Fig. 517.—*Difusión de gases.*

Si la pared es tal que sólo la atraviesa un solo gas de una mezcla de gases o sólo el solvente de una solución, se la llama *semipermeable*.

Es fácil observar fenómenos de difusión. Para gases basta tomar dos frascos, uno con aire y otro con gas más pesado y unirlos por sus bocas. Aunque se coloque el gas más pesado hacia abajo, al cabo de cierto tiempo se observará que en los dos frascos hay una mezcla homogénea de ambos gases. Se ha producido la difusión de uno en el otro (fig. 517).

Para difusión en líquidos es necesario que sean líquidos miscibles y que no reaccionen químicamente. Si en un vaso con agua se vierte con mucho cuidado un poco de alcohol coloreado como para que flote en la parte superior, se observará que la superficie de separación pierde nitidez y poco a poco el alcohol se difunde en toda la masa líquida.

Fig. 518.—*Difusión de un líquido en otro.*

Un método para estudiar los fenómenos de difusión, consiste en colocar dentro de un recipiente con agua un frasco con el líquido cuya difusión se quiere estudiar. Se destapa por un dispositivo especial y des-

pués de un tiempo se determina la cantidad de sustancia que se ha difundido en el agua (fig. 518).

Estos fenómenos se explican por la teoría cinética de la materia; las moléculas de uno de los líquidos o gases que llegan a la superficie de separación, chocan con las del otro y progresivamente se van penetrando mutuamente.

Llamamos *concentración* de un componente en un punto, a la relación entre la masa de ese componente y la masa total en un pequeño volumen rodeando a ese punto.

En general, observamos que cada gas o líquido se difunde hacia la zona en que disminuye su concentración.

Si medimos la cantidad q de sustancia que en el tiempo t atraviesa una superficie s entre dos puntos situados a la distancia l en los cuales las concentraciones son c_1 y c_2, tendremos:

$$q = k \cdot s \frac{c_2 - c_1}{l} t$$

siendo k el coeficiente de difusión.

Se suele expresar midiendo el tiempo en días y la longitud en centímtros. O bien en unidades c. g. s.

Para la difusión en agua de una solución saturada de sal de mar se ha encontrado el coeficiente:

$$k = 108 \times 10^{-7} \frac{cm^2}{seg} = 0{,}93 \frac{cm^2}{día}$$

§ 301. — **Efusión.** — Se produce cuando una pared porosa de yeso, magnesia u otra sustancia, separa dos gases diferentes. En ese caso se mezclan a través de la pared, pero la velocidad de pasaje es diferente para cada gas. La ley de Graham dice que la velocidad de pasaje es proporcional a la presión del gas e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad.

Esta ley concuerda con lo que se podría prever en base a la teoría cinética.

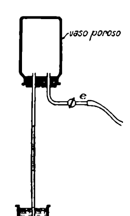


Fig. 519.—*Aparato para comprobar la efusión del hidrógeno.*

Una experiencia sencilla puede realizarse con un vaso poroso de porcelana (fig. 519). Se tapa de modo que haga un buen cierre, con un tapón con dos agujeros, en uno de los cuales se coloca un tubo recto que al colocarlo invertido, se sumerge en agua coloreada. Por el otro se hace llegar hidrógeno que burbujea en el agua. Cuando se haya desalojado todo el aire se suspende la llegada del hidrógeno y se cierra el tubo lateral. Se observará entonces que el líquido asciende por el tubo. Eso es debido a que la velo-

cidad de difusión del hidrógeno hacia el exterior es mayor que la del aire hacia el interior, por lo cual se produce un descenso de la presión.

También se producen fenómenos de difusión de gases a través de paredes sólidas. Una lámina delgada de caucho es atravesada por el oxígeno con una velocidad 2,5 veces mayor que por el nitrógeno.

Por eso, si se hace pasar aire por una membrana de caucho, su riqueza en oxígeno aumenta del 21 al 40 %.

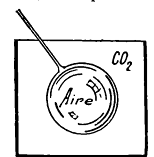


Fig. 520.—*Una pompa de jabón colocada en* CO_2 *aumenta de volumen hasta explotar por la difusión que se produce a través de sus paredes.*

La difusión de gases a través de líquidos puede observarse haciendo flotar en anhídrido carbónico una pompa de jabón llena de aire. Aumenta de volumen hasta romperse por efecto del anhídrido carbónico que la atraviesa.

Las paredes semipermeables, como hemos dicho, se caracterizan por dejar pasar un solo gas, deteniendo todos los demás. El platino, el cuarzo y el paladio, calentados al rojo, dejan pasar el hidrógeno y detienen los demás gases. En un recipiente cerrado y con un tubito lateral de platino, llenado con hidrógeno, se obtiene un buen vacío calentando al rojo el platino con una llama que no contenga hidrógeno. Recíprocamente, con llama de hidrógeno aumenta la presión en el interior del recipiente (fig. 521).

§ 302. — **Ósmosis.** — Los fenómenos osmóticos se producen por la difusión de líquidos a través de membranas *semipermeables,* que se caracterizan por dejar pasar unas sustancias e impedir el pasaje de otras.

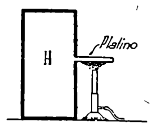


Fig. 521.—*Difusión de hidrógeno, a través de platino al rojo.*

En la naturaleza existen membranas semipermeables, como la envoltura del protoplasma de las células vegetales, el pergamino, etc.

Si tomamos una célula vegetal y la sumergimos en agua pura, como en su interior posee una solución con 7,5 de cloruro de sodio por litro, el agua penetra al interior y como la sal no sale, aumenta de volumen hasta romperse. Inversamente, colocada en una solución de sal de mayor concentración que la propia, disminuye de volumen, pues el agua sale hacia el exterior.

Se obtienen también membranas semipermeables artificiales. Las que dan mejor resultado son las de Traube, obtenidas

colocando en un vaso poroso una solución de ferrocianuro de potasio y sumergiéndolo en otra solución de sulfato de cobre. En el interior de los poros se forma un precipitado de ferrocianuro de cobre, que constituye una membrana semipermeable caracterizada por dejar pasar el agua y detener sustancias disueltas, como, por ejemplo, el azúcar.

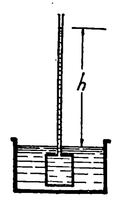


Fig. 522.—*Presión osmótica.*

La comprobación se realiza en las siguientes condiciones: se pega al vaso en que se ha formado la membrana semipermeable, un largo tubo de vidrio. Se lo llena hasta cierto nivel con una solución cualquiera, supongamos que sea de azúcar, y se sumerge en agua pura. Se observará que el nivel asciende en el tubo, pues el agua pasa a través de la membrana semipermeable. Alcanzará así una altura *h* que mide el exceso de presión de la solución con respecto al solvente puro. Esa presión es la *presión osmótica* de la solución (fig. 522).

En las soluciones diluídas (pequeña concentración) se comprueban las siguientes leyes:

1°) La presión osmótica de la solución es proporcional a la concentración.

2°) Es proporcional a la temperatura absoluta.

Resulta, pues, una ley análoga a la de la presión en los gases perfectos (§ 244):

$$pV = nRT \quad \text{(Ley de Van't Hoff)}$$

siendo n el número de moles disueltos en el volumen V y R la constante de los gases.

Esta fórmula vale para las soluciones no electrolíticas, es decir, para las soluciones que no se descomponen por efecto de la corriente eléctrica.

En las soluciones electrolíticas (de ácidos, bases o sales) la presión que se obtiene es mayor que la que correspondería según la ley de Van't Hoff. Este hecho se explica admitiendo que una parte de las moléculas disueltas se *disocia*, es decir, que se divide en dos o más partes llamadas *iones*. Con ello aumenta el número de partículas de sustancia disuelta (soluto) y se comportará como si hubiera aumentado el número n de moles que interviene en la fórmula. A este fenómeno aludiremos al estudiar la conductibilidad eléctrica de las soluciones en el curso de electricidad.

Dos soluciones de igual presión osmótica se llaman **isotónicas**.

El hecho de disolver una sustancia trae aparejada modificaciones en la tensión de vapor y en los puntos de ebullición y congelación del solvente.

Las leyes que rigen esas modificaciones y los nombres que recibe su estudio son los siguientes:

1º La tensión de vapor de la solución es menor que la del solvente puro a igual temperatura (*tonometría*).

2ª El punto de ebullición de la solución es más alto que el del solvente puro a igual presión (*ebullometría*).

3º El punto de congelación de la solución es inferior al del solvente puro (*criometría*).

Las leyes de Raoult establecen que dichas modificaciones son proporcionales al número de moles de sustancia disuelta en la unidad de volumen de solución.

En las soluciones isotónicas adquieren el mismo valor. Así por ejemplo: una molécula gramo de azúcar (342 g) disuelta en diez litros de agua y una de urea (60 g) también disuelta en 10 litros de agua constituyen soluciones isotónicas. Ambas tienen igual presión osmótica y además, igual tensión de vapor, por lo que hierven y se congelan a la misma temperatura.

Las medidas de los ascensos del punto de ebullición o los descensos de la tensión de vapor o el punto de congelación, se aplican a la determinación de pesos moleculares.

CAPITULO XXVI

MÁQUINAS TÉRMICAS

§ 303.—Se llaman máquinas o motores térmicos a aquellas máquinas que transforman energía térmica en trabajo.

Existen de dos tipos; en unas, la fuente de calor es exterior al motor propiamente dicho: máquinas de vapor y turbinas de vapor. En otras, es interior y se llaman motores de combustión interna: motor de explosión, motores diesel y semi-diesel.

Todos funcionan tomando calor de una fuente caliente y entregando a una fuente fría el que no se ha transformado en trabajo.

Se llama **rendimiento** a la relación entre el trabajo realizado y el calor tomado a la fuente caliente.

$$\eta = \frac{L}{Q}$$

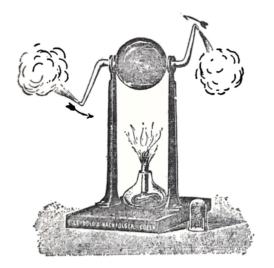


Fig. 523.—*Modelo de la primera máquina térmica construída por Herón de Alejandría.*

La primera máquina térmica data de Herón de Alejandría quien construyó una esfera con dos picos en que el vapor que salía por ellos producía su rotación. Se basa en el principio del molinete hidráulico y la turbina de reacción.

Pero el cilindro con pistón móvil data de Papin (1690), y la primera máquina de vapor fué construída por Savery (1618) y Newcomen (1705) (fig. 524).

A pesar de eso, a mediados del siglo pasado, después de los estudios de Sadi Carnot sobre el calor y en particular su estudio sobre lo que se llama el *segundo principio de la termodinámica*, comple-

mentados especialmente por Clausius y W. Thomson, sólo entonces comenzó el estudio racional de las máquinas térmicas. Los rendimientos, que eran muy bajos, mejoran extraordinariamente a partir de esa época.

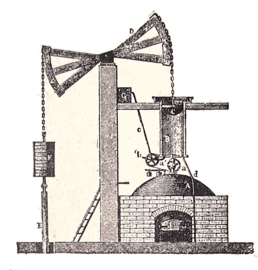


Fig. 524.—*Máquina de vapor de Savery y Newcommen.*

§ 304.—**Motor a émbolo de simple efecto.**—La máquina de vapor de simple efecto es la más sencilla de todas. Por un tubo *a* (fig. 525) llega al cilindro el vapor de la caldera, que, siendo su presión mayor que la atmosférica, actúa sobre el pistón desplazándolo y trasmitiendo su movimiento al volante V. En la mitad de la carrera se suspende la entrada de vapor, y el que está en el cilindro continúa expandiéndose. Al llegar

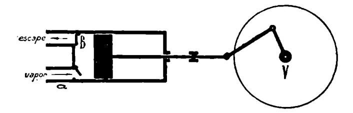


Fig. 525.—*Máquina de vapor de simple efecto.*

al final del recorrido, se abre la válvula en B y el volante, que ha adquirido cierta velocidad, produce el retroceso del pistón y la expulsión del vapor. En este instante se inicia nuevamente el proceso.

§ 305. — **Motor de doble efecto.** — Para aumentar la potencia y la regularidad de funcionamiento se construye el motor de doble efecto en el cual el vapor acciona sobre ambas caras del pistón. Para ello es necesario un sistema de distribución del vapor que oportunamente lo envíe hacia uno u otro lado del cilindro, y al mismo tiempo comunique el restante con el exterior. En la figura 526 se puede analizar su funcionamiento. El

distribuidor se mueve por un vástago vinculado al mismo eje

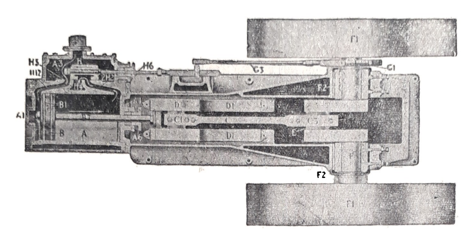


Fig. 526.—*Corte de una máquina de vapor de doble efecto. El vástago H_6 desplaza al distribuidor H.*

del volante. En ambos lados del émbolo se produce el proceso indicado para la máquina de simple efecto.

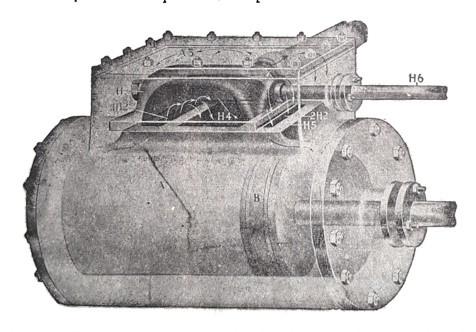


Fig. 527.—*Vista por transparencia del émbolo y distribuidor en la máquina de vapor.*

En la posición de la figura 526, por la cámara A_3, que está unida a la caldera, llega el vapor a la cara izquierda del émbolo, mientras sobre la cara de la derecha actúa la presión atmos-

férica, pues la cámara A está vinculada al exterior por intermedio de H_4. Cuando el émbolo llega al final de su carrera hacia la derecha, el distribuidor se corre vinculando la cámara A con A_3 y la A_1 con H_4, invirtiéndose la acción de las presiones.

§ 306. — **Ciclo en la máquina de vapor.** — Hemos mencionado ya el segundo principio de la termodinámica diciendo que, es imposible construir un motor cuyo único efecto exterior sea realizar un trabajo y enfriar una única fuente de calor.

De modo que no es posible idear máquinas térmicas sin dos fuentes de calor, una caliente y otra fría.

En la máquina de vapor que hemos descripto la fuente caliente es la caldera que proporciona vapor y la fuente fría es la atmósfera si el escape se produce directamente a ella.

En algunos casos se utiliza un *condensador,* donde se condensa el vapor del escape y que constituye la fuente fría.

Del principio de Carnot se deduce que si la temperatura absoluta de la fuente caliente es T_1 y la de la fuente fría T_2, el rendimiento podrá llegar, como límite, al valor:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad [1]$$

y ello, en un motor perfecto en que el gas que interviene en el funcionamiento experimente cuatro transformaciones sucesivas, que constituyen lo que se conoce como *ciclo de Carnot.*

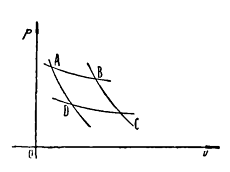


Fig. 528.—*Ciclo de Carnot.*

Este ciclo consiste en lo siguiente: primero una expansión a temperatura constante igual a la de la fuente caliente (isotérmica); luego, el gas continúa expandiéndose sin ganar ni perder calor (se llama expansión adiabática), y como realiza trabajo exterior, se enfría; cuando llega a la temperatura de la fuente fría, se comprime isotérmicamente, y, finalmente, se comprime nuevamente sin ganar ni perder calor (adiabáticamente) hasta que su temperatura sea igual a la de la fuente caliente.

Tomando ejes coordenados *p* y *v* este proceso está representado por el cuadrilátero *ABCD.* En ese diagrama el trabajo está representado por el área *ABCD* (fig. 528).

En base a esto, el perfeccionamiento de los motores térmicos ha consistido en tratar que el ciclo que realizan se apro-

xime al ciclo ideal de Carnot, con el cual el rendimiento se aproxima al de la fórmula [1].

De esa fórmula deducimos que, a igualdad de temperatura de la fuente caliente, el rendimiento mejora aumentando la diferencia $T_1 - T_2$ entre las temperaturas de ambas fuentes.

En las máquinas de vapor, el ciclo que realmente realiza el vapor es el de la figura 529. Durante una primera parte de la carrera del émbolo (aproximadamente ¼), entra vapor a temperatura y presión prácticamente constantes (admisión); luego se cierra la entrada y el vapor se expande según 2-3 (expansión aproximadamente adiabática); en seguida el émbolo retrocede expulsando el vapor a la presión aproximadamente constante del exterior o del condensador (expulsión), y antes de llegar al final se cierra el escape y se comprime el resto de vapor que ha quedado, alcanzando una temperatura próxima a la del vapor de admisión (compresión 4-1).

Los cuatro tiempos: admisión, expansión, expulsión y compresión, corresponden aproximadamente a los del ciclo de Carnot. Sobre el diagrama, un corte del cilindro muestra la carrera D-E del émbolo y las posiciones en que inicia los cuatro tiempos. Debajo se muestra la duración relativa de cada tiempo, por los ángulos de un diagrama circular.

§ 307 — **Indicador de Watt.** — Para obtener las curvas de la fig. 529 se utiliza el indicador de Watt, que se acopla direc-

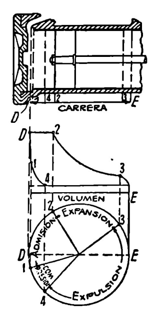


Fig. 529.—*Ciclo real en máquina de vapor.*

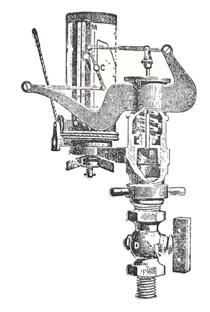


Fig. 530.—*Indicador de Watt.*

tamente al cilindro (fig. 530). La presión actúa directamente sobre un pistón P, cuyos desplazamientos son proporcionales a las presiones debido al resorte R. Estos desplazamientos se inscriben en un cilindro M, que gira accionado por el émbolo de la máquina, en forma tal que a cada posición del émbolo corresponde una posición del cilindro. Estas rotaciones son alternativas como el movimiento del émbolo.

Así, se obtiene una curva en que las ordenadas representan presiones en una cierta escala que depende del resorte y las abscisas representan los volúmenes barridos por el émbolo.

§ 308. — **Turbinas de vapor.** —No pueden dejar de mencionarse las turbinas de vapor que en cierto tipo de aplicaciones sustituyen con ventaja a los motores a émbolo. Se obtienen

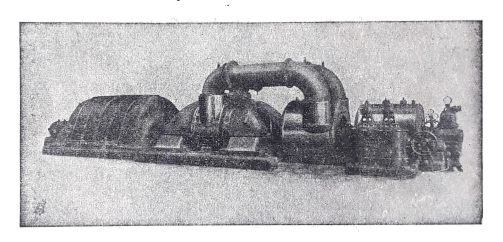


Fig. 531.—*Turbina de vapor de* 20.000 *Kw y* 3.000 *rev. por minuto.*

grandes velocidades y potencias enormes con máquinas relativamente pequeñas. En la figura 351 se reproduce una fotografía de una turbina de vapor cuya potencia es de 20 000 Kw (27.000 H. P.) y marcha a 3 000 revoluciones por minuto.

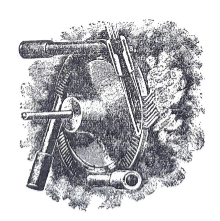


Fig. 532.—*Principio de la turbina de acción.*

En las turbinas el vapor actúa sobre pequeñas paletas llamadas *álabes* que van colocadas en la periferia de una rueda (fig. 532). Existen dos tipos: de acción (Laval) y de reacción (Parson). En las turbinas de acción el vapor adquiere gran velocidad an-

tes de llegar a la rueda, en conductos llamados *toberas,* y al chocar con los álabes de la rueda le imprime el movimiento de rotación (fig. 532). En la figura 533 pueden observarse dos cortes de una turbina de acción. El de la parte superior es un corte radial (con un plano que contiene al eje de rotación). El de la parte inferior se ha realizado según un plano perpendicular al anterior a la altura de los álabes.

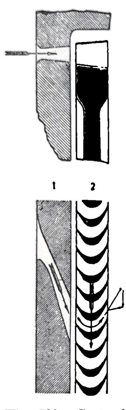


Fig. 533.—*Corte de la turbina de acción a la altura de los álabes.*

Se observa la dirección y forma de la tobera, que está fija, por la que pasa el chorro de vapor que choca con los álabes de la rueda móvil. Se construyen también con varias ruedas móviles colocadas entre toberas fijas.

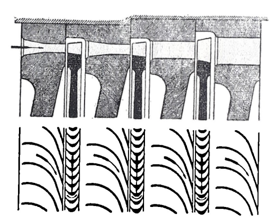


Fig. 534.—*Corte de una turbina de reacción a la altura de los álabes.*

En las turbinas de reacción el vapor llega a la rueda a una velocidad relativamente pequeña, y los álabes tienen forma tal que en ellos el vapor aumenta su velocidad imprimiéndole por reacción una velocidad en sentido contrario. Generalmente la turbina consiste en un conjunto de ruedas montadas sobre el mismo eje, que giran entre álabes fijos a la carcasa, como puede verse en el corte de la figura 534.

A medida que el vapor recorre la turbina, se va enfriando y la presión disminuye aumentando correspondientemente el volumen, de modo que el rotor está formado por ruedas cuyos diámetros crecen desde la entrada (zona de alta presión), hasta el escape (baja presión).

Son comunes las turbinas combinadas, en que la primera parte (alta presión) es el tipo de acción y la segunda de reac-

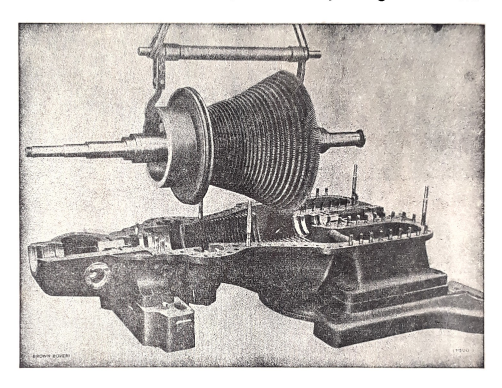


Fig. 535.—*Rotor de una turbina combinada de acción y reacción.*

ción. La figura 535 muestra el rotor y la parte inferior de una de ellas.

§ 309. — **Motor de explosión.** — Son los motores más utilizados en los vehículos automotores por la sencillez de su puesta en marcha, su poco peso y reducido volumen.

Son de cuatro tiempos. El cilindro posee dos válvulas, de admisión y de expulsión y una bujía destinada a producir una chispa en el momento oportuno (fig. 536).

Imaginemos el émbolo en la parte superior de su recorrido. Al descender se abre la válvula de admisión y penetra una mezcla de nafta y aire (mezcla carburante), al subir el émbolo se comprime fuertemente (compresión), y cuando llega al final de su carrera se produce una chispa en la bujía que provoca la inflamación y expansión de los gases (explosión y expansión) que actúan sobre el émbolo llevándolo hasta el final de su recorrido. Finalmente, el émbolo sube mientras se abre la válvula por donde escapan los gases de la combustión (expul-

sión). El ciclo realizado se representa en el diagrama de la figura 537.

De los cuatro tiempos *admisión, compresión, explosión y expansión y expulsión,* sólo en el tercero actúa la fuerza motriz.

Por eso, si se quiere hacer funcionar un motor de un solo

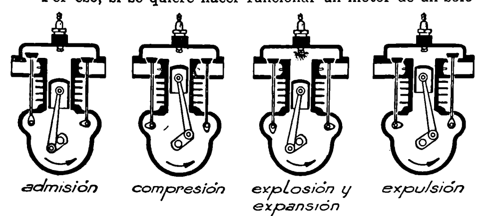


Fig. 536.—*Esquema de funcionamiento en el motor de explosión.*

cilindro, debe colocársele un volante que acumule energía como para poder realizar los tres tiempos restantes a expensas de uno sólo. Existen algunos tipos de motores en que todo el ciclo se cumple en dos tiempos.

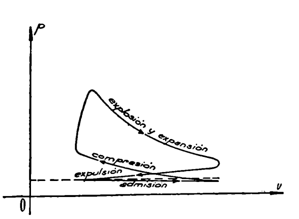


Fig. 537.—*Ciclo en el motor de explosión de cuatro tiempos.*

En la práctica se utilizan motores de por lo menos, dos cilindros.

Los motores de más cilindros llevan siempre un número par para que las acciones sobre el eje motriz (cigüeñal) estén más equilibradas.

En los motores de los aviones los cilindros están distribuídos generalmente según radios alrededor del eje (fig. 583).

En los automóviles están colocados paralelamente (en línea) o inclinados, una mitad de los cilindros a cada lado de un plano vertical de simetría (en V) (figs. 539 y 540).

§ 310. — **Motores Diesel.** — Los motores Diesel funcionan en forma parecida al motor de explosión. Son de cuatro tiem-

pos, pero la combustión no es producida por una bujía, sino que la compresión es tan violenta que la elevación de temperatura alcanza a provocar la combustión de la mezcla de petróleo y aire, que es el combustible utilizado.

Fig. 538.—*Motor en estrella, de aviación*

Analizaremos su funcionamiento con ayuda de la figura 541. Durante el primer período (*admisión*) al bajar el émbolo, penetra aire por la válvula A, que se cierra cuando aquél llega al final de su carrera. Sube el émbolo y comprime al aire aumentando la temperatura hasta alrededor de 600° C (*compresión*). Entonces se produce por el tubo central B la inyección del combustible, que quema al ser inyectado. Comienza la expansión y durante un pequeño intervalo de recorrido continúa la inyección de combustible, tiempo durante el cual prosigue la combustión. Se alcanza así una temperatura de unos 1600° C y continúa la *expansión*. Próximo el émbolo al final de su carrera, se abre la válvula C y comienza el período de *expulsión* en que los gases de la combustión son expelidos al exterior. Se ha cumplido así un ciclo completo.

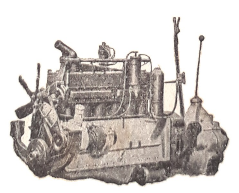
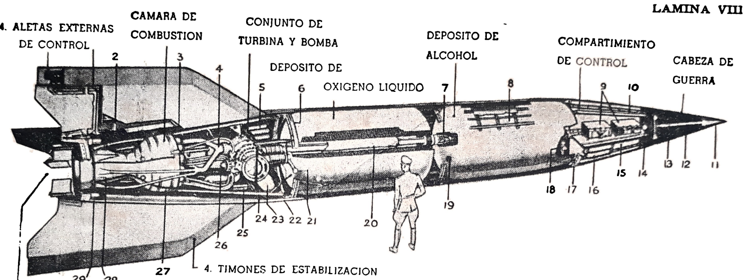


Fig. 539.—*Motor en línea.*

En la parte inferior de la figura, cuatro diagramas en que las abscisas representan *volúmenes* y las ordenadas *presiones*, tienen marcada en rojo la parte del ciclo recorrida en cada uno de los cuatro tiempos.

LAMINA VIII



Los números indican: 1. Cadena de comando de los timones exteriores mediante. 2. Motor eléctrico. 3. Inyectores a la cámara de combustión. 4. Conducto del alcohol. 5. Botellones de aire comprimido. 6. Anillo de unión. 7. Válvula controlada para el alcohol. 8. Red de soporte de la estructura. 9. Equipo de radio-control. 10. Conducto de la cabeza de guerra al tanque de alcohol. 11. Espoleta. 12. Conducto de la espoleta. 13. Tubo de explosivo. 14. Espoleta eléctrica. 15. Soporte del equipo de radio. 16. Botellones de nitrógeno. 17. Anillo frontal de unión. 18. Girocompases para alturas y azimut. 19. Tapa de llenado del tanque de alcohol. 20. Conducto aislado de alimentación del alcohol. 21. Boca de llenado del tanque de oxígeno. 22. Tubos extensibles de conexión a las bombas de alcohol y oxígeno. 23. Tanque de agua oxigenada. 24. Soporte tubular para el conjunto de turbina y bombas. 25. Tanque de permanganato de calcio — el generador de la corriente de vapor hidrógeno/permanganato, para la turbina, está ubicado detrás de este tanque. 26. Unidad distribuidora de oxígeno. 27. Conductos de alcohol para refrigeración adicional. 28. Entrada de alcohol a la pared doble del motor del cohete. 29. Servo motores electro hidráulicos.

Esquema de un proyectil V-2 de largo alcance, utilizado por los alemanes en la guerra 1939-45. Los combustibles básicos eran alcohol etílico y oxígeno líquido. Las dimensiones son 14 metros de longitud y 1,60 de radio. Los tanques llevan 3.400 kg. de alcohol y 5.000 kg. de oxígeno líquido. Pequeños tanques suplementarios llevan agua oxigenada y permanganato de calcio cuya combustión forma vapor sobrecalentado para la turbina que acciona las bombas de alcohol y oxígeno.

En este diagrama, como en los de las otras máquinas térmicas, el área encerrada entre las curvas es proporcional al trabajo realizado.

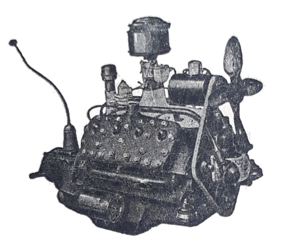


Fig. 540.—*Motor en V.*

El hecho de tener que alcanzar presiones muy elevadas hace necesaria mayor solidez del cilindro. Estos motores son

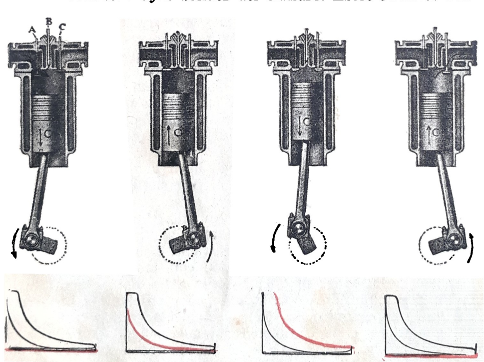


Fig. 541.—*Ciclo en el motor Diesel de cuatro tiempos.*

mucho más pesados y requieren un volante de mayores dimensiones que los motores de explosión. Su puesta en marcha es más dificultosa, pues requiere una presión previa. No son cómodos para aquellas aplicaciones en que son necesarias frecuentes detenciones y puestas en marcha, pero su utilidad es enorme en las plantas industriales fijas.

§ 311. **Motores a reacción.** — Uno de los últimos adelantos en materia de motores lo constituye la construcción de motores a reacción, que han permitido concebir la esperanza de desplazarse en el espacio, fuera de la atmósfera.

El principio de funcionamiento es el del molinete hidráulico de la figura 305 o el del motor de Herón de la figura 523. Si un vehículo de masa M expulsa hacia atrás una masa m con velocidad v, recibe un impulso hacia adelante igual a mv, La velocidad que adquiere el vehículo será, en ausencia de toda otra fuerza, tal que:

$$MV = mv$$

En los proyectiles cohete (bombas V-2) con las cuales se han alcanzado en la atmósfera alturas superiores a los 100 Km, se produce la expulsión hacia atrás de los gases que resultan al quemar alhocol etílico y el proyectil adquiere velocidades estimadas en 5 000 km/hora. Se comprende que la masa del móvil disminuye muy apreciablemente a lo largo de la trayectoria. El principio de este método de propulsión es análogo al que se utiliza en las "cañitas voladoras", tan conocidas por los aficionados a los juegos pirotécnicos.

Estos proyectiles cohete llevan dos depósitos: uno con alcohol y el otro con oxígeno líquido, de modo que su funcionamiento se independiza del medio exterior. En los aviones se utiliza otro tipo de motor que lleva una entrada frontal para el aire que, mezclado con el combustible, contribuye a aumentar la masa expulsada hacia atrás, sin que sea necesario cargarlo previamente en el vehículo. Claro está que este segundo tipo de motor no se adapta al uso de los proyectiles que deben desplazarse en el vacío o en atmósfera muy enrarecida. Los aviones equipados con motores a reacción alcanzan velocidades muy superiores a las de los que tienen motores a explosión, esperándose poder resolver el problema del vuelo supersónico, es decir, a velocidades superiores a la del sonido en el aire (aproximadamente 1200 Km/hora).

Existen ya numerosos modelos de estos motores y su estudio mecánico y termodinámico ocupa un nuevo capítulo y un motivo de especialización dentro del campo de la técnica automotriz.

Actualmente tienen gran aplicación en los aviones a reacción, los que van reemplazando con ventajas múltiples a los accionados por motores de explosión y hélices.

Gracias al empleo de los motores a reacción se han podido construir modelos capaces de superar la velocidad del sonido. La figura 542 muestra un avión *"supersónico"* de reciente uso en la aviación británica que marcha a **más de 2000 Km.** por hora.

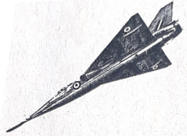


Fig. 542. — *Avión supersónico a reacción, con ala "Delta" (Fairey Delta 2). Velocidad máxima: 1132 millas por hora, (2100 Km/h).*

También se han desarrollado múltiples modelos de proyectiles análogos a las bombas V, teledirigidos por ondas hertzianas y controlados por instalaciones de Radar.

Con motivo del "Año Geofísico" (1957-58) se ha preparado el lanzamiento de *satélites artificiales*, logrados mediante cohetes múltiples teledirigidos.

Un primer cohete lanzado verticalmente es dirigido convenientemente y con una segunda explosión lanza otro menor que alcanza mayor velocidad. Éste, a su vez, lanza un tercero, más pequeño, en dirección horizontal y a velocidad suficiente para que la fuerza centrífuga equilibre a la atracción terrestre.

Con procedimiento análogo, los científicos rusos han creado exitosamente el primer satélite artificial, que ha continuado moviéndose en una órbita ubicada a unos 900 Km. de altura, luego de ser lanzado a velocidad del orden de los 28.000 Km. por hora. Dada la resistencia presentada por las capas atmosféricas, es de prever la disminución progresiva de velocidad del "sputnik", lo que ocasionará su acercamiento a la tierra y su destrucción por efectos del calor de roce luego de un tiempo más o menos largo. Un segundo satélite artificial (noviembre 1957) se desplazó en su órbita situada a unos 1500 kilómetros de la superficie terrestre. Dentro de este "Sputnik II" viajó una perra, que se mantuvo viva por varios días.

Están también en preparación proyectiles cohetes a propulsión con energía atómica, con los que se intentarán viajes interplanetarios. El primer paso sería el viaje a la Luna, para el que ya hay proyectos serios y para el que serán de utilidad los datos registrados y trasmitidos por los satélites artificiales, que llevan instrumental adecuado y trasmisores, y que, eventualmente, podrán llevar observadores vivientes.

PROBLEMAS A RESOLVER

INDICACIONES GENERALES

La inclusión de la presente serie de problemas, clasificados por capítulos y acompañados por los resultados, responde a la necesidad de completar el estudio teórico con ejercicios en que se apliquen las leyes y principios en forma concreta. Es éste el único medio de comprobar si realmente se ha asimilado el conocimiento teórico.

No se dan aquí las soluciones para dejar al alumno el esfuerzo y la satisfacción de hallarlas, pero se dan los resultados, que servirán como control y guía.

En todos los problemas, las fórmulas a utilizar deberán buscarse en el respectivo capítulo, salvo pequeños detalles que, en algunos casos, corresponden a capítulos anteriores.

Es conveniente adquirir el hábito de resolver completamente el problema, en forma general, con letras, antes de sustituir los datos numéricos; con ello se evita la realización de cálculos superfluos. Al introducir los datos en el cálculo, deberá cuidarse de *indicar las unidades* correspondientes junto con los números, reduciéndolas todas al mismo sistema (técnico, m. k. s. o c. g. s.) cuando es necesario.

En todos los casos *se deberá cumplir la condición de homogeneidad* según la cual, después de realizar con las unidades las mismas operaciones que con los números, debe quedar expresado el resultado en la unidad correspondiente a la magnitud que se calcula.

Teniendo en cuenta estas indicaciones, será fácil hallar la solución de los problemas que siguen:

CAPITULO I

MAGNITUDES Y MEDICIONES

1.— a) Encontrar el valor de 3,8 km en metros, centímetros, milímetros.

b) Expresar 166 cm en milímetros, metros y kilómetros.

2.—¿Qué ángulo forman los radios terrestres que pasan por los extremos de un camino recto de 4,65 km?

Radio terrestre = 6370 km.

Respuesta: = 2'30''

3.—Se tiene una regla graduada en milímetros y se quiere aplicar un nonius que aprecie 0,05 mm. ¿Cuántas divisiones debe tener y qué longitud abarcará?

Respuesta: $N = 20$; $l = 19$ mm.

4.—Sobre un círculo dividido de 15 en 15 minutos se quiere aplicar un nonius que aprecie 20". ¿Cuántas divisiones debe tener y qué longitud abarcará?

Respuesta: $N = 45$; $a = 11°$.

5.—Calcular el ángulo sólido bajo el cual se ve un disco de 50 cm de radio desde un punto situado a 3 m sobre la perpendicular en su centro.

Respuesta: $\Omega = 0{,}087$ esterrad.

6.—Expresar en radianes y grados sexagesimales el ángulo que intercepta un arco de 26,2 cm en una circunferencia de radio 80 cm.

Respuesta: $a = 0{,}3275$ rad $= 18°04'51''$

CAPÍTULO II

ESTÁTICA

1.—Seis niños, divididos en dos bandos, tiran de los extremos de una soga. Hacia un lado tiran con fuerza de 15, 19 y 16 kgr y hacia el otro con fuerzas de 10, 18 y 20 kgr. ¿Qué sucederá?

¿Se podrá emplear una cuerda de 10 mm^2 de sección, que sólo resista 5 kg por mm^2 sin romperse?

Respuesta: a) El conjunto se desplaza hacia el lado de los primeros, pues hay un exceso a su favor de 2 kgr.
b) Se puede emplear pues si se aplican las fuerzas sin dar tirones, basta con que resista 48 kgr.

2.—Un lanchón colocado en el centro de un canal está sostenido por cables que forman un ángulo de 30° con el eje del canal. En cada cable hay un dinamómetro que indica 40 kgr. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre el lanchón? Si esta fuerza fuera 100 kgr; ¿cuánto indicarían los dinamómetros?

Respuesta: a) $R = 69{,}2$ kgr.
b) $F = 57{,}8$ kgr.

3.—Dos fuerzas concurrentes de 80 y 150 kgr forman entre sí un ángulo de 90°. Hallar la resultante.

Respuesta: $R = 170$ kgr.

4.—En dos postes distanciados 40 metros, están atados a la misma altura los extremos de un cable de 44 metros de longitud y peso despreciable. Calcular la tensión del cable si de su punto medio pende un cuerpo que pesa 2 200 kgr.

5.—Por medio de una barra de 2,80 m de longitud, llevan dos obreros una carga de 140 kgr, suspendida a 1,80 del de adelante. ¿Cuál es la carga que soporta cada obrero?

Respuesta: $F_1 = 50$ kgr; $F_2 = 90$ kgr.

6.—Hallar el módulo y posición de la resultante de dos fuerzas paralelas y de igual sentido de 1400 y 800 kgr, respectivamente, situadas a la distancia de 5,50 metros.

Respuesta: a) $R = 2\,200$ kgr.
b) Entre las dos a 2 m de la de 1400 kgr.

7.—Dos personas llevan una carga de 120 kgr colgada de una barra horizontal de 2,7 m de largo, que sostienen por los extremos. La de adelante sostiene una parte igual a 40 kgr. ¿Qué esfuerzo hace la otra persona y dónde está colocada la carga?

Respuesta: a) $F = 80$ kgr.
b) a 1,80 m del extremo delantero.

8.—Calcular la resultante de tres fuerzas concurrentes de 60, 70 y 80 kgr, que actúan según las aristas de un triedro trirrectángulo.

Respuesta: 122 kgr.

9.—Demostrar que el centro de gravedad de un triángulo es el punto de intersección de las medianas.

Respuesta: Se demuestra que el c. de g. debe estar sobre una mediana dividiendo el triángulo en fajas angostas, paralelas al lado correspondiente, y se repite para las otras medianas.

10.—De los vértices de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm penden hilos con pesos cuyo valor en gramos es igual a la longitud del lado opuesto. a) Determinar el punto de donde se lo puede apoyar para que esté en equilibrio despreciando el peso del triángulo. b) Resolver gráficamente, suponiendo que el triángulo pesa 20 gr.

Respuesta: a) Uniendo el vértice *A* que forman la hipotenusa y el cateto menor, con el punto del cateto mayor situado a 1,5 cm del menor, el centro de gravedad se encuentra sobre esa línea a 2,24 cm del punto *A*.

CAPÍTULO III

MÁQUINAS SIMPLES. EQUILIBRIO

1).—Una palanca sin peso está sometida a la acción de las siguientes fuerzas: a la derecha y a partir del apoyo: 120 gr a 20 cm; 80 gr a 24 cm, y 20 gr a 30 cm; a la izquierda 200 gr a 25 cm y 40 gr a 30 cm. ¿Qué fuerza hay que aplicar y a qué lado del apoyo, a 20 cm de distancia para restablecer el equilibrio? ¿Cuál es la reacción del apoyo?

Respuesta a) Hay que aplicar 64 gr a 20 cm a la derecha del apoyo.
b) $R = 524$ gr.

2).—Una cuerda rodea 1/6 del perímetro de una polea móvil que soporta un peso Q = 120 Kgr. ¿Qué esfuerzo hay que aplicar al extremo de la cuerda para mantener el equilibrio?

Respuesta: $P = 120$ Kgr.

3).—¿Cuál es la fuerza paralela al plano que equilibra a un cuerpo de 2500 Kgr colocado sobre un plano inclinado de longitud $l = 8$ m y altura $h = 0{,}75$ m? ¿Cuál es la reacción del plano?

Respuesta: a) $F = 234{,}4$ Kgr.
b) $N = 2487{,}5$ Kgr.

4).—Una polea móvil soporta un peso de 80 Kgr. El extremo libre de la cuerda está arrollado al cilindro de un torno de 0,20 m de radio. ¿Qué esfuerzo debe aplicarse a la manivela del torno cuya longitud es 0,50 m para equilibrar el sistema?

Respuesta: $p = 16$ Kgr.

5).—Se tiene un aparejo diferencial cuyos radios son: $R = 25$ cm y $r = 20$ cm. ¿Qué esfuerzo debe aplicarse, teóricamente, para equilibrar un peso de 2 000 Kgr?

Respuesta $P = 200$ Kgr.

CAPÍTULO IV

CINEMÁTICA

1).—Un corredor recorre 100 m en 10,8 seg. Calcular su velocidad en Km/hora.

Respuesta: $v = 33{,}34$ Km/hora.

2).—Un tren recorre en 20 horas una distancia de 1003 millas. Calcular su velocidad media en Km/hora, milla/hora, m/seg, pie/seg.

Respuesta $v = 80{,}71 \dfrac{\text{Km}}{\text{hora}} = 50{,}15 \dfrac{\text{milla}}{\text{hora}}$
$= 22{,}42 \dfrac{\text{m}}{\text{seg}} = 73{,}55 \dfrac{\text{pie}}{\text{seg}}$

3).—Un tren se desliza sobre un plano inclinado partiendo de reposo. Al cabo de 1 seg su velocidad es 1 m/seg, después de 2 seg es 2 m/seg y al final de 3 seg es 3 m/seg. ¿Cuál es su aceleración? ¿Qué espacio ha recorrido en 3 seg? ¿Y en 10 seg?

Respuesta: a) $a = 1$ m/seg^2.
b) $e_3 = 4{,}5$ m.
c) $e_{10} = 50$ m.

4).—Un cuerpo se mueve con movimiento uniformemente acelerado siendo la aceleración 3 m/seg^2. ¿Cuál es la velocidad al final de 5 seg? ¿La velocidad inicial en el octavo segundo? ¿El espacio recorrido en 5 y 7 seg?

Respuesta: a) $v_5 = 15$ m/seg.
b) $v_7 = 21$ m/seg.
c) $e_5 = 37{,}5$ m.
d) $e_7 = 73{,}5$ m.

5).—Un móvil parte del origen de coordenadas y se mueve sobre el eje Ox con movimiento uniformemente retardado en el sentido de las x crecientes. Siendo $v_0 = 5$ m/seg y $a = -0{,}2$ m/seg^2, calcular: a)

cuanto tarda en anularse su velocidad; b) a qué distancia del origen; c) cuánto tarda en volver a pasar por el origen; d) en qué instante y lugar su velocidad es 2 m/seg.

Respuesta: a) $t = 25$ seg.
b) $e = 62,5$ m.
c) $t = 50$ seg.
d) $t = 15$ seg.; $e = 52,5$ m.

6).—Se lanza un cuerpo hacia arriba con velocidad inicial de 45 m/seg. ¿Cuánto tarda en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura? ¿Cuánto tarda en llegar nuevamente al suelo?

Respuesta: a) $t = 4,59$ seg.
b) $h = 103,4$ m.
c) $t = 9,28$ seg.

7).—Un botero rema con velocidad 2 m/seg en una dirección que forma un ángulo de 30° hacia el este con la línea sud-norte. El viento arrastra al bote con velocidad 3,2 m/seg en una dirección que forma el mismo ángulo con la dirección oeste-este. Calcular la velocidad resultante, sus componentes en las direcciones sud-norte y oeste-este y su dirección.

Respuesta: a) $v = 5$. m/seg.
b) En dirección oeste - este: $v_x = 3,77$ m/seg; en dirección sud-norte: $v_y = 3,33$ m/seg.
c) Forma un ángulo de 41°30' con la dirección oeste-este.
$\left(tg\,\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}\right)$

8).—¿Con qué velocidad debe lanzarse hacia arriba un proyectil para que alcance, en el vacío, la altura de 20 metros?

Respuesta: $v = 19,8$ m/seg.

9).—¿Con qué velocidad llega al suelo un cuerpo que cae en el vacío desde 200 m de altura?

Respuesta: $v = 62,65$ m/seg.

10).—Un vehículo se mueve sobre un plano horizontal con velocidad constante 60 Km/hora. Llega a un plano inclinado de 200 m de longitud y lo recorre en 10 seg. ¿El movimiento se ha acelerado o retardado? Calcular la aceleración en el plano inclinado y la velocidad final.

Respuesta: a) Se acelera.
b) $a = 0,668$ m/seg².
c) $v = 23,34$ m/seg.

11).—¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo el agua de una nube que se encuentra a 300 m de altura suponiendo que la caída se cumpliera en el vacío?

Respuesta: 7,83 seg.

12).—Se deja caer una piedra a un pozo y al cabo de 3 seg se oye el choque con el agua. Calcular la profundidad del pozo suponiendo que el sonido se propaga en el aire con velocidad constante 340 m/seg.

Respuesta: $h = 40,70$ m.

CAPITULO V

DINAMICA

1).—Expresar en unidades técnicas y c. g. s. la masa de un cuerpo cuyo peso normal es 10 ton.

Respuesta: $1019{,}72 \frac{\text{Kgr. seg}^2}{\text{m}} = 10^7$ g.

2).—Expresar el peso en Buenos Aires ($g = 979{,}669$ cm/seg^2) de un cuerpo cuyo peso normal es 5 Kgr.

Respuesta: $P = 4{,}995$ Kgr.

3).—Sobre un vehículo de 3 ton colocado sobre un plano horizontal, actúan 5 hombres aplicando una fuerza de 40 Kgr cada uno. Calcular la aceleración que recibe y el espacio que recorre en 8 seg.

Respuesta: a) $a = 0.653$ m/seg^2.
b) $e = 20.90$ m.

4).—Un cuerpo de 10 Kgr se desliza sobre un plano inclinado de 3 m de longitud y altura 0,6 m. Suponiendo nulo el frotamiento, calcular su aceleración y el tiempo que tarda en recorrer el plano.

Respuesta: a) $a = 1{,}96$ m/seg^2.
b) $t = 1{,}75$ seg.

5).—Una fuerza actúa sobre un cuerpo que pesa 5 Kgr, inicialmente, en reposo y le hace recorrer 80 m en 20 segundos. Calcular la fuerza en dinas y Kgr.

Respuesta: $f = 0{,}22$ Kgr. $= 2{,}16 \times 10^5$ dina

6).—Un cuerpo plástico de 4,5 Kgr de peso choca contra una pared con velocidad 6 m/seg. Calcular la fuerza que ejerce si el choque dura 0,1 seg.

Respuesta: $f = 27{,}6$ Kgr.

7).—Se lanza un proyectil con velocidad 400 m/seg e inclinación 30º con respecto al plano horizontal. Calcular el alcance y la altura máxima a que llega.

Respuesta: a) $X = 14{,}12$ Km.
b) $h = 2038$ m.

8).—Sobre un cuerpo actúa durante 18 segundos una fuerza de 10 Kgr y le hace recorrer 450 m. ¿Cuál es el peso del cuerpo?

Respuesta: $P = 35{,}3$ kgr.

9).—Un tren que marcha a 60 Km/hora se detiene en medio minuto. Admitiendo fuerza de frenaje constante, calcular su valor sabiendo que el tren pesa 80 ton.

Respuesta: $F = 4540$ kgr.

10).—Dos esferas perfectamente elásticas experimentan un choque central. Si las masas están en la relación $m_1 : m_2 = 1 : 2$ y las velocidades iniciales son iguales y opuestas, calcular las velocidades finales.

Respuesta: $v_1f = \frac{5}{3} v_1$; $v_2f = \frac{1}{3} v$
considerando $v_1i = + v$; $v_2i = - v$

11).—Por la garganta de una polea pasa un hilo sin peso, de cuyos extremos penden pesas de 60 y 55 g, respectivamente. Al principio están en reposo y se las suelta. ¿Qué movimiento se produce si se supone nula la masa de la polea?

Respuesta: Se mueve el sistema descendiendo la pesa de 60 g. con aceleración $a = 44{,}3 \dfrac{cm}{seg^2}$

12).—En las condiciones del problema anterior, ¿qué masas deben colocarse en los extremos del hilo para que con la misma diferencia de 5 g se produzca un movimiento de aceleración 8 cm/seg²?

Respuesta: Deben colocarse masas de 309,1 y 304,1 g.

CAPÍTULO VI

TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA

1).—Calcular en Kgm, erg y joule, el trabajo necesario para elevar a 30 m de altura un peso de 170 Kgr.

Respuesta: $L = 5100$ Kgm $= 50031 \times 10^7$ erg $=$ $= 50031$ joule.

2).—Calcular la energía cinética de un cuerpo de 5 Kgr que cae en el vacío desde 80 m de altura.

Respuesta: $L = 400$ Kgm $= 3920$ joule.

3).—Se lanza hacia arriba un proyectil de 150 g con velocidad inicial de 300 m/seg. Calcular su energía cinética inicial y la misma a 50 m de altura.

Respuesta: $E = 688$ Kgm $= 6750$ joule $= 6.75 \times 10^{10}$ erg.
$E_1 = 680{,}5$ Kgm.

4).—Un cuerpo de 28 Kgr cae libremente por un plano inclinado de inclinación 30°, partiendo del reposo. Calcular su energía cinética cuando ha recorrido 16 m sobre el plano.

Respuesta: $E = 224$ Kgm.

5).—¿Qué aumento de energía potencial experimenta un avión de 2500 Kgr que asciende hasta 1000 metros?

Respuesta: $E = 2\,500.000$ Kgm.

6).—Calcular la energía cinética con que llega al suelo un cuerpo de 80 gr que cae en el vacío desde 10 m de altura.

Respuesta: $E = 0{,}800$ Kgm.

7).—Un móvil de 3200 Kgr sube por un plano inclinado que asciende 5 m cada 100 m medidos sobre el plano. Calcular la fuerza motriz sabiendo que la velocidad: a) se mantiene constante; b) en 200 m pasa de 40 a 60 Km/hora; c) en el mismo camino disminuye de 40 a 20 Km/hora.

Respuesta: a) $F = 160$ Kgr.
b) $F = 285{,}6$ Kgr.
c) $F = 84{,}2$ Kgr.

8).—El pilón de un martinete para hincar pilotes, pesa 600 Kgr y se lo deja caer desde 0,8 m de altura. Calcular la resistencia que se opone al pilote si después de 10 golpes penetra 5 cm.

Respuesta: $F = 96\,000$ Kgr.

9).—Calcular la potencia necesaria para elevar un montacargas de peso total 3000 Kgr a 6 m de altura en 30 segundos. ¿Qué motor debe aplicarse si el rendimiento total es 0,7? Expresar la potencia en C. V. y Kgm/seg.

Respuesta: a) $W = 600$ Kgm/seg $= 5884$ watt $= 8$ C.V.
b) $W = 11,4$ C.V.

10).—Por un plano inclinado de base 80 m y altura 10 m desciende un cuerpo de 600 Kgr sin que se modifique su velocidad. Calcular la variación de energía mecánica.

Respuesta: $E = 6000$ Kgm.

CAPÍTULO VII

PÉNDULO - MOV. CIRCULAR - MOV ARMÓNICO - PLANETAS

1).—Los números de oscilaciones de dos péndulos están entre sí como 26 : 32. Calcular la relación de sus longitudes.

Respuesta: $l_1 : l_2 = 256 : 169$.

2).—¿Cuánto atrasa o adelanta por día en el ecuador ($g_0 = 9{,}781$) un reloj de péndulo que en Buenos Aires ($g = 9{,}79669$) marcha correctamente?

Respuesta: En un día marca 70 segundos menos, luego atrasa 1 min 10 seg.

3).—El péndulo de un reloj da en Buenos Aires 90 oscilaciones simples por minuto. Calcular su longitud reducida.

Respuesta: $l = 44{,}12$ cm.

4).—Una piedra de 1 Kgr, atada a un hilo, describe en un plano horizontal una circunferencia de radio 2,5 m, dando 60 vueltas por minuto. Calcular la fuerza que ejerce la cuerda.

Respuesta: $F = 10{,}07$ Kgr.

5).—Se hace girar un balde con agua en un plano vertical describiendo una circunferencia de radio 60 cm. Calcular las velocidades, angular y tangencial mínimas para que el agua no se derrame.

Respuesta: $\omega = 4{,}087$ 1/seg $= 39{,}03$ rev. p. min.; $v = 2{,}45$ m/seg.

6).—Un ciclista describe, a 20 Km/hora, una curva de 30 m de radio. ¿Cuánto debe inclinarse para no caer?

Respuesta: $tg\ a = \frac{v^2}{R.g}$; $a \cong 6^\circ$

7).—¿Qué velocidad tangencial debe imprimirse a un péndulo de 80 cm de longitud para que describa un cono vertical de ángulo en el vértice igual a 30°?

Respuesta: $v = \sqrt{g.\ l.\ tg\ 30°.\ sen\ 30°}$
$= 1{,}50$ m/seg.

8).—El radio de Júpiter es $R = 71\,000$ Km y el más alejado de sus satélites se encuentra a 27 R Km del centro, recorriendo su órbita en $t = 16{,}69$ días de 86.400 segundos. Calcular la aceleración g' en la superficie de Júpiter.

Respuesta: $g' = 26{,}53$ m/seg².

9).—¿A qué distancia del centro de la tierra se equilibra, en el plano ecuatorial, la atracción terrestre con la fuerza centrífuga?

Respuesta: $d = \sqrt[3]{\dfrac{g\ R^2.T^2}{4\ \pi^2}} = 42.217$ Km.

(tomando $R = 6370$ Km; $T = 86400$ seg).

10).—Un volante de 1,50 m de radio, gira a 150 rev. p. min. Estudiar el movimiento de la proyección sobre un diámetro, de un punto de su periferia.

Respuesta: $\omega = 5\ \pi$
$e = 1{,}5\ sen\ 5\pi t$
$v = 7{,}5\ \pi\ cos\ 5\pi t$
$a = -\ 37{,}5\ \pi^2\ sen\ 5\pi t$

CAPÍTULO VIII

ROTACION DEL CUERPO RÍGIDO

1).—Se tiene un cilindro de cobre ($\delta = 8{,}9$) de radio $R = 2$ cm y longitud $l = 6$ cm. Calcular su momento de inercia con respecto al eje baricéntrico longitudinal y con respecto a un eje paralelo que pasa a 10 cm del anterior.

Respuesta: $Ig = 1342$ g.cm²; $I = 68447$ g.cm².

2).—Calcular la energía cinética de rotación de un volante cilíndrico macizo de acero ($\delta = 7{,}5$) de radio $R = 40$ cm y longitud $l = 15$ cm, cuando gira a 220 rev. p. min.

Respuesta: $E = 12.007$ joule $= 1.224$ kgm.

3).—Calcular el tiempo de oscilación de un péndulo formado por un disco de radio $R = 20$ cm y masa $m = 300$ g a cuyo borde se ha atado un hilo de 60 cm para suspenderlo.

Respuesta: $T = 1{,}82$ seg.

4).—Calcular las aceleraciones de caída por un plano inclinado de ángulo α de una esfera y un cilindro macizos suponiendo que caen rodando.

Respuesta: $a = \dfrac{g \cdot \text{sen } \alpha}{1 + \dfrac{I}{MR^2}}$

esfera: $a = \dfrac{5}{7} g \text{ sen } \alpha$:

cilindro: $a = \dfrac{2}{3} g \text{ sen } \alpha$.

CAPITULO IX

HIDROSTÁTICA

1).—Una masa de hormigón de 10 toneladas se apoya sobre una superficie de 1 m de ancho por 2,50 m de largo. Calcular la presión suponiendo distribución uniforme.

Respuesta: $p = 4000 \dfrac{Kgr}{m^2} = 0,4 \dfrac{Kgr}{cm^2}$.

2).—Un tanque de 6 m de largo, 2 m de ancho y 3 m de profundidad, se llena con agua. Calcular la presión en el fondo y en un punto situado a 1,5 m debajo de la superficie.

Respuesta: En el fondo $p = 300 \dfrac{gr}{cm^2}$ a 1,5 m de profundidad: $p' = 150 \dfrac{gr}{cm^2}$

3).—En un recipiente cilíndrico de radio $R = 5$ cm se coloca mercurio hasta una altura $h = 16$ cm sobre el fondo. Calcular: a) el peso del mercurio; b) la presión en el fondo; c) la fuerza ejercida sobre éste; d) la presión en un punto interior situado a 5 cm sobre el fondo ($\delta = 13,6 \dfrac{g}{cm^3}$).

Respuesta: a) $P = 17.090$ gr.

b) $p = 217,6 \dfrac{gr}{cm^2}$.

c) $F = 17.090$ gr.

d) $p' = 163,2 \dfrac{gr}{cm^2}$.

4).—Un recipiente en forma de tronco de cono recto circular de bases paralelas, con su base mayor hacia abajo, está lleno de mercurio. Calcular: a) la presión en el fondo; b) la fuerza total o empuje sobre el mismo; c) el peso del mercurio contenido en el vaso.

Dimensiones del recipiente: $R = 12$ cm; $r = 8$ cm; $h = 6$ cm.

Respuesta: a) $p = 81,6 \dfrac{gr}{cm^2}$

b) $F = 86915$ gr.

c) $P = 25977$ gr.

5).—Un recipiente cilíndrico circular de radio r y altura h se llena de líquido. Calcular la relación h/r para que la fuerza total sobre el fondo sea el triple de la que actúa sobre la superficie lateral.

Respuesta: $\frac{h}{r} = \frac{1}{3}$

6).—Un cuerpo pierde aparentemente 25 gr de peso sumergido en agua, 23 gr en aceite y 20 gr en alcohol. Calcular: a) la densidad relativa del aceite y b) la del alcohol; c) el peso específico del cuerpo, sabiendo que su peso en el vacío es de 90 gr.

Respuesta: a) $D = 0,92$.
b) $D' = 0.80$.
c) $\rho = 3,6 \frac{gr}{cm^3}$

7).—Una esfera de platino pesa 660 gr en el aire, 630 gr en el agua y 606 gr en ácido sulfúrico. Calcular los pesos específicos del platino y del ácido sulfúrico.

Respuesta: a) $\rho = 22 \frac{gr}{cm^3}$.
b) $\rho' = 1,8 \frac{gr}{cm^3}$.

8)—Un cilindro de hierro de radio 4 cm y altura 10 cm pesa en el aire 3765 gr Calcular su peso en aceite de densidad relativa $D = 0,80$.

Respuesta: $P = 3363$ gr.

9).—Suponiendo que la corona de Hieron pesaba 1070 gr en el aire y 1010 gr en el agua, calcular cuántos centímetros cúbicos de oro y cuántos de plata había en ella (los respectivos pesos específicos son: 19,3 gr/cm^3 y 10,5 gr/cm^3).

Respuesta: oro: 50 cm^3; plata: 10 cm^3.

10).—¿Cuántos metros cúbicos desplaza de menos un navío de peso 20.000 ton al pasar de un río al mar en que la densidad del agua es 1,026 (se supone en el río $\delta = 1$ g/cm^3).

Respuesta: 507 m^3.

CAPITULO X

HIDRODINAMICA

1).—Se practica un orificio pequeño en la pared lateral de un recipiente lleno de líquido hasta un nivel 80 cm más alto que el orificio. Calcular la velocidad teórica de salida.

Respuesta: $v = 3,96$ m/seg.

2).—En la pared lateral de un recipiente lleno de líquido hasta 90 cm de altura, se abren dos orificios a 15 y 60 cm sobre el fondo. Calcular el alcance de ambos chorros en el instante inicial.

Respuesta: $X_1 = 67$ cm; $X_2 = 84,8$ cm.

3).—El tubo de descarga en un dique, situado a 30 m debajo del nivel máximo de las aguas, tiene 50 cm de diámetro. Calcular: a) la velocidad de salida; b) el caudal, siendo el coeficiente de contracción $k = 0,64$; c) la potencia del chorro.

Respuesta: a) $v = 24,26 \frac{m}{seg}$

b) $Q = 3,049 \frac{m^3}{seg}$

c) $W = 91,462 \frac{Ton\ m}{seg} = 1219$ CV.

4).—La presión hidrostática del agua en una cañería es de 650 mm de mercurio cuando no hay circulación. Calcular cuánto disminuye si el agua circula con velocidad de 3 m/seg, suponiendo líquido ideal.

Respuesta: $\Delta p = 33,8$ mm de Hg.

5).—En el fondo de un tanque situado a 15 m de altura, se practica un orificio. ¿Con qué velocidad llega al suelo el agua que sale por él, si hay 75 cm de agua en el tanque y se supone que cae en el vacío?

Respuesta: $v = 17,57 \frac{m}{seg}$

CAPÍTULO XI

PRESIÓN ATMOSFÉRICA

1).—Calcular en dina/cm² la presión atmosférica normal.

Respuesta: $p = 1\,013\,280 \frac{dina}{cm^2}$

2).—La superficie del cuerpo humano es, aproximadamente, 1,40 m². Calcular la fuerza total que sobre él ejerce la atmósfera cuando la presión barométrica tiene su valor normal.

Respuesta: $F = 14\,462$ Kgr.

3).—Calcular el desnivel entre dos puntos de la atmósfera en los que, en un instante dado, hay una diferencia de presión de 5 mm de mercurio.

Respuesta: $h_2 - h_1 = 52,60$ m.

4).—En dos puntos A y B se miden simultáneamente las presiones barométricas $p_1 = 610$ mm y $p_2 = 760$ mm de mercurio; siendo la temperatura media $t = 20°$ C. Calcular el desnivel aplicando la fórm. [5] § 146.

Respuesta: $h = 189,20$ m.

5).—Calcular la fuerza ascencional de un aerostato cuyo peso total, incluyendo el gas, es: $P = 650$ Kgr, siendo su volumen de partida $V = 600$ m³ (peso específico del aire $\rho = 1,3$ Kgr/m³).

Respuesta: $F = 130$ Kgr.

CAPÍTULO XII

COMPRESIBILIDAD DE GASES

1).—La rama más corta de un tubo de Mariotte tiene 20 cm de largo y está llena de aire a la presión de 760 mm de mercurio. Calcular el desnivel de mercurio necesario para reducir el volumen a 2/5 de su valor inicial y la altura de la columna en la rama abierta, sobre el cero de la escala.

Respuesta: a) 1140 mm ; b) 1260 mm.

2).—Un tubo cilíndrico cerrado en uno de sus extremos, de longitud 80 cm, está lleno de aire. Sumergido verticalmente en mercurio hasta que el extremo cerrado quede a 10 cm sobre el nivel exterior, se pregunta: ¿qué longitud de tubo ocupa el aire encerrado, si la presión exterior es de 74 cm de mercurio.

Respuesta: 51,3 cm.

3).—Un manómetro de aire comprimido, con tubo cilíndrico, contiene aire que ocupa una longitud $l = 40$ cm cuando la presión es 760 mm. ¿Cuánto se elevará el mercurio si la presión se hace igual a 10 atmósferas?

Respuesta: $e = 36$ cm.

4).—El cuerpo de bomba de una máquina neumática tiene un volumen de 800 cm^3 y la campana 4000 cm^3. Calcular la presión después de 20 golpes de émbolo, suponiendo la presión inicial de 76 cm de mercurio.

Respuesta: $p_{20} = 1{,}98$ mm de Hg.

5).—Los volúmenes del cilindro y la campana de una máquina neumática están en la relación 1 : 5. ¿Cuántos golpes de émbolo se necesitan para reducir la presión a 1/20 del valor primitivo?

Respuesta: $n = 16{,}4$.

CAPÍTULO XIV

ELASTICIDAD

1).—Un alambre de acero de 0,4 mm^2 de sección y 4 m de longitud, es cargado con un peso de 2 Kgr. Calcular el alargamiento que experimenta.

Respuesta: $\Delta l = 0{,}9091$ mm.

2).—¿Qué peso es necesario para producir un alargamiento de 2 mm a un alambre de cobre de 6 m de longitud y 0,8 mm^2 de sección?

Respuesta: $P = 2{,}67$ Kgr.

CAPÍTULOS XV y XVI

ACÚSTICA

1).—¿Qué longitud de onda corresponde a una vibración de período $T = 0{,}1$ seg que se propaga en un medio elástico con velocidad $v = 600$ m/seg?

Respuesta: $\lambda = 60$ m.

2).—¿Cuál es la longitud de onda del la_3 ($n = 435$ vs) en el aire ($v = 340$ m/s) y en el agua ($v = 1435$ m/seg)?

Respuesta: a) $\lambda_1 = 0{,}7817$ m.
b) $\lambda_2 = 3{,}2989$ m.

3).—Las longitudes de tres tubos abiertos están en la relación 15 : 12 : 10. ¿Qué relación habrá entre las frecuencias de sus notas fundamentales?

Respuesta: 0,067 : 0,0834 : 0,1.

4).—Idem si los tubos son cerrados.

Respuesta: 0,067 : 0,0834 : 0,1.

5).—Una cuerda de longitud igual a 54 cm da la nota do_3. Calcular cuánto se la debe acortar para que, con igual tensión, dé el mi_3.

Respuesta: $l' = l - \frac{1}{5} l = 43{,}2$ cm.

6).—Calcular la relación entre las frecuencias emitidas por dos cuerdas de igual longitud y de la misma sustancia, que están tensas por pesos $P = 3$ Kgr y $P' = 0{,}8$ Kgr, si sus diámetros son, respectivamente, 3 y 5 mm.

Respuesta: 3,21.

7).—En un tubo de Kundt, con aire en su interior, se ha medido la longitud de onda $\lambda = 26$ cm. Calcular la velocidad de propagación en la varilla, si la longitud es 1,20 m y está fija en su punto medio.

Respuesta: $v = 3138 \frac{m}{seg}$.

8).—A un navío llegan con tres segundos de diferencia las ondas sonoras propagadas en el agua y en el aire, provenientes del sonido de un disparo producido en otro navío alejado. Calcular la distancia que los separa.

Respuesta: $d = 1336{,}7$ m.

CAPÍTULOS XVII y XVIII

TERMOMETRÍA Y DILATACIÓN

1).—Calcular en grados Réaumur y Fahrenheit las temperaturas correspondientes a: — 20, 20, 50 y 80° C.

Respuesta: $-20°C = -16°R = -4°F$;
$+20°C = +16°R = +68°F$;
$+50°C = +40°R = +122°F$
$+80°C = +64°R = +176°F$

2).—Calcular el alargamiento que experimenta al pasar de 10 a 50 grados una varilla de hierro de longitud $l_0 = 25$ m; ($\lambda = 0.0000117$).

Respuesta: $\Delta l = 1{,}17$ cm.

3).—¿Qué relación deben tener las longitudes de dos varillas de cobre y hierro, para que las diferencias de sus longitudes sean de 5 cm a cualquier temperatura?

Respuesta: $\frac{l_h}{l_c} = \frac{\lambda_c}{\lambda_h} = \frac{0{,}000017}{0{,}000011} = 1{,}5455.$

4).—Un frasco de vidrio ($\lambda = 0{,}000000861$) está lleno de mercurio a 0° C. Se lo calienta hasta 100° y se derraman 1,5 cm³ a esa temperatura. ¿Cuál es el volumen del frasco a 0°?

Respuesta: $V_0 = 96$ cm3

5).—¿Cuánto atrasa por día un reloj de péndulo de cobre, no compensado, que marcha exactamente a 0°, si se lo mantiene a 20° C?

Respuesta: 14,7 seg.

CAPÍTULO XIX

DILATACIÓN DE GASES

1).—Una masa de gas tiene un volumen $V_0 = 4000$ cm³ a la temperatura de 0° centígrado y presión $p_0 = 760$ mm de mercurio. Calcular: a) El volumen que ocupará a la temperatura $t = 120°$. b) El volumen ocupado a temperatura $t = 100°$ y presión $p = 450$ mm de mercurio.

Respuesta: a) $v = 5758$ cm3.
b) $v = 9221$ cm3.

2).—En una probeta se han recogido 80 cm³ de oxígeno a la temperatura $t = 20°$ centígrado y presión $p = 700$ mm de mercurio. Se pide: a) el volumen reducido a condiciones normales (0° y 760 mm); b) La masa del oxígeno recogido.

Respuesta: b) $v = 68{,}7$ cm3.
a) $m = 0{,}09817$ g.

3).—Una masa de 10 g de helio ocupa un volumen $V = 50$ litros a la presión $p = 740$ mm de Hg. Tomando como peso molecular del helio $M = 4$ y sabiendo que $R = 0{,}082$ litro-atm., calcular la temperatura a que se encuentra.

Respuesta: $t = 237{,}5°$ K $= -35{,}5°$ C.

4).—Un cuerpo de bomba contiene aire a 0° cuya presión es de 120 mm de Hg; en esas condiciones el pistón, que tiene un diámetro $D = 25$ cm, se mantiene en equilibrio por efecto de su peso. ¿Cuánto pesa el pistón? ¿Cuánto hay que aumentar ese peso para que el equilibrio se mantenga calentado el aire en 10°?

Respuesta: a) $P = 80100$ gr.
b) $\Delta P = 2924$ gr.

5).—Un globo contiene 2 litros de aire a 10° C y 750 mm de presión; si la presión baja 10 mm. ¿Cuánto debe disminuir la temperatura para que el volumen quede invariable?

Respuesta: t = 3,8° C.

CAPÍTULO XX

CALORIMETRÍA

1).—En un calorímetro de hielo se coloca un trozo de hierro de 80 g y cuya temperatura inicial es 100°. ¿Cuánto hielo se funde?

Respuesta: m = 11,5 g.

X 2).—En un calorímetro de mezclas cuyo recipiente y agitador de latón pesan 240 gr, se colocan 400 g de agua, siendo la temperatura inicial t_i = 15°,2. Calcular la temperatura final si se vierten 120 g de granallas de cinc a 100° C.

Respuesta: t_f = 17°,4.

\ 3).—En el calorímetro del problema anterior y a la misma temperatura inicial, se vierten 500 g de mercurio a 70° C. Calcular la temperatura final.

Respuesta: t_f = 17°,25.

* 4).—En un calorímetro de Bunsen se echan 4 g de agua a 20°. ¿Cuánto se corre el índice si el capilar tiene 1 mm de diámetro?

Respuesta: l = 11,54 cm.

5).—En un calorímetro para gases, cuyo equivalente total en agua es M = 500 g, la temperatura pasa del valor t_i = 15°,3 a t_f = 22°,5. ¿Qué volumen de aire a 100° ha circulado si su temperatura inicial es 100° C y la presión constante p = 760 mm?

Respuesta: V = 0,1446 m³.

CAPÍTULO XXI

EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR

1).—¿De qué altura debe caer un cuerpo de plomo para que se funda, suponiendo que la energía total del choque queda en el mismo y su temperatura inicial es t_i = 20°?

Respuesta: h = 6,40 Km.

2).—¿Cuánto calor se produce al perforar una chapa de bronce si son necesarias 12 vueltas del barreno al cual se aplica una fuerza de 200 gr a 10 cm del eje de rotación?

Respuesta: Q = 35,5 cal.

3).—¿Qué trabajo se gasta para vencer la presión atmosférica al congelar 50 Kg de agua si la densidad del hielo es 0,917 y la del agua 1 y a qué cantidad de calor equivale?

Respuesta: a) L = 46,7 Kgm.
b) Q = 109,3 cal.

CAPITULO XXIII

CAMBIOS DE ESTADO

1°.—Se colocan 2 Kgr de hielo en 4 Kgr de agua a 20°. ¿Se funde todo el hielo? ¿Cuál es la temperatura final suponiendo al sistema térmicamente aislado? (f = 80 cal).

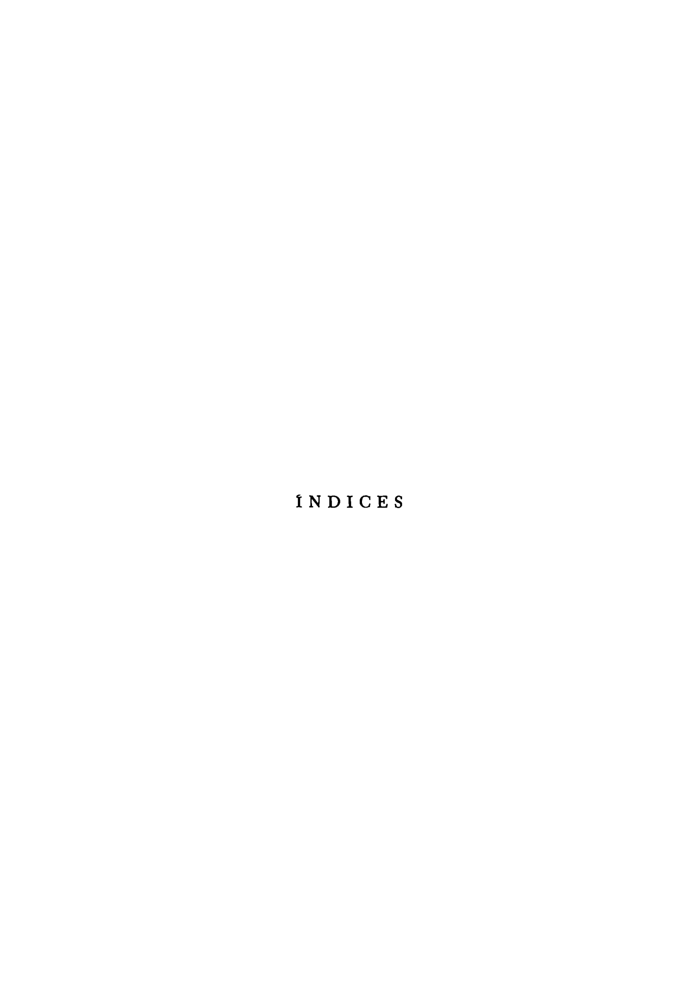
Respuesta: a) Se funde sólo 1 Kgr de hielo
b) t_f = 0° C.

2).—A un recipiente con 5000 g de agua llega vapor a 100°, que se condensa. Si la temperatura inicial es 12°8 y la final 65°, calcular cuánto vapor se ha inyectado.

Respuesta: m = 454,7 g.

3).—Se vierten 300 g de plomo fundido en 450 g de agua a 15°. Calcular la temperatura final.

Respuesta: t_f = 24°,92.



ÍNDICES

INDICE

INTRODUCCION

CAPÍTULO I

MAGNITUDES Y MEDICIONES

CAPÍTULO II

ESTATICA

CAPÍTULO III

MOMENTO DE FUERZAS - EQUILIBRIO

CAPÍTULO IV

CINEMATICA

CAPÍTULO V

DINAMICA

CAPÍTULO *VI*

TRABAJO MECANICO - ENERGIA - APLICACIONES

CAPÍTULO *VII*

PENDULO - MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME
MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMONICO
MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

CAPÍTULO VIII

ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO

CAPÍTULO IX

HIDROSTATICA

CAPÍTULO X

HIDRODINAMICA

CAPÍTULO XI

GASES - PRESION ATMOSFERICA - NEUMOSTATICA

CAPÍTULO XII

LEY DE BOYLE-MARIOTTE - BOMBAS - MAQUINAS NEUMATICAS

CAPÍTULO XIII

DINAMICA DE GASES - RESISTENCIA AL MOVIMIENTO EN LOS FLUIDOS

CAPÍTULO XIV

ELASTICIDAD EN SOLIDOS, LIQUIDOS Y GASES

CAPÍTULO XV

INTRODUCCION A LA ACUSTICA - MOVIMIENTO VIBRATORIO - SONIDO Y SUS CARACTERISTICAS

CAPÍTULO XVI

ACUSTICA

CAPÍTULO XVII

TERMOMETRIA

CAPÍTULO XVIII

DILATACION DE SOLIDOS Y LIQUIDOS

CAPÍTULO XIX

DILATACION DE GASES - TEMPERATURA ABSOLUTA ECUACION DE ESTADO - TERMOMETRO DE GAS

CAPÍTULO XX

CALORIMETRIA

CAPÍTULO XXI

EQUIVALENTE MECANICO DEL CALOR
CONSERVACION DE LA ENERGIA

CAPÍTULO XXII

PROPAGACION DEL CALOR

CAPÍTULO XXIII

CAMBIOS DE ESTADO - FUSION - VAPORIZACION - HIGROMETRIA - VOLATILIZACION

CAPÍTULO XXIV

CONTINUIDAD DE LOS ESTADOS LIQUIDO Y GASEOSO - FENOMENOS CRITICOS - VAPORES Y GASES - LIQUEFACCION DE GASES

CAPÍTULO XXV

DIFUSION - OSMOSIS - PRESION OSMOTICA

CAPÍTULO XXVI

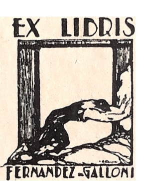
MAQUINAS TERMICAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE LÁMINAS

IINDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

ESTE TOMO
SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL 20 DE ENERO DE 1961
EN LA IMPRENTA Y CASA EDITORA CONI
CALLE PERÚ 684, BUENOS AIRES


EX LIBRIS
FERNANDEZ-GALLONI

150 -

9460. 428

ALTAMIRANO (TONINO) (PJE) Ricardo Güiraldes Nº 3110 | 60-1889
ARONSON (SERGIO) GUALEGUAYCHU 3922 50-9499 | 99-3928
BAROUSSE (MARIO) MEDINA 243 TE- 69-1979
BRÚVER (JORGE) ALEJANDRO KORN 4173
CORREDOIRA (JULIO) GRAL MARTIN DE GAINZA 750 TE: 90-2930
CUCCHI (CARLOS) Hortiguera 1475 T.E. 92-6170
CHIARANTE (ROBERTO) Ada. Riestra 6100
DE LUCCA (ALBERTO) CENTENERA 1766 _ 92-6680
EASARRET (JORGE) PILAR 1922 TE 68-3803
~~FERRARA (MIGUEL ANGEL)~~ Santa (Coco | 68-1036
FERRARI (GUILLERMO) ARAMBURU 356 88-1363
FUX (HORACIO) ~~Gral~~ M. DE GAINZA 63 1er P. ~~Ab~~ 4 90-0372
GAIVIRONSKI (RAUL) JUAN A. GARCIA 1456 58-0163
GAI (ARMANDO) NEUQUEN 2245 59-7399
GARILLO (RAUL) BEAUCHEF 262 90-8401
IGLESIAS (MANUEL) COSQUIN 4730 60-0225
KUKSO (CARLOS) ~~Av~~ ROSARIO 162 2º B. 99-8449
LEONI (ALBERTO) LINIERS 765 PROV
MARTINEZ (RICARDO) Biarritz 2437 58-2947 (vecino)
MIR GONZALEZ (HORACIO) BAIGORRIA 2966 50-4106 LOPE
ORTEGA (ERNESTO) LIBERTAD 904 (HAEDO) 658-3295
PERNAS (PEDRO) DIRECTORIO 1145 -99-6142
PRAJS (CLAUDIO)
PRAJS (LEONARDO) } CESAR DIAZ 1628 595493
ROMERO BEAUCHEF 1414 92-9824
SANTOS (ARTURO) ~~FERRARA MIGUEL ANGEL (AVELLANEDA...)~~
SEIGMAN (NESTOR) BALBASTRO 466 922-4156 ASAMBLEA 1416
SIMONDINI (CARLOS) Felix Lora 30 1º A T.E 90.1615
TOLCACHIER (JORGE) JUAN AGUSTIN GARCIA 1868 1P. D 58-9819
WAJNEWAJ (NESTOR). PRINGLES 784 5º D 14. 89-6276

LLAMAR 1/7/65 (Y CADA 6 MESES)

MARDINI Horacio: 99-1418

1 par de zapatos fuertes.
1 alpargatas.
2 pares de medias lana.
4 " " " strech.
1 pantalón para salir.
1 Vaquero.
1 pantalón + o -
5 calzoncillos - camisetas. / 2 invierno / 3 verano.
2 remeras o camisas.
1 camisa para salir.
1 " de invierno
2 pullovers gruesos
" liviano
1 corbata.
1 saco.

1 gorro o saco impermeable
1 malla.
1 linterna
art. de colados.
cantimplora
1 manta

